

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ PARIS.DIDEROT (Paris 7)

École doctorale de sciences mathématiques de Paris-Centre

DOCTORAT EN INFORMATIQUE

STRUCTURE DES PAVAGES, DROITES DISCRÈTES 3D ET
COMBINATOIRE DES MOTS

soutenue le 4 mai 2012 par

Sébastien LABBÉ

JURY

M. Christophe REUTENAUER,	Président
M. Pierre ARNOUX,	Rapporteur
M. Dominique PERRIN,	Rapporteur
M. Xavier PROVENÇAL,	Membre
Mme Valérie BERTHÉ,	Directrice
M. Srečko BRLEK,	Directeur

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je désire d'abord remercier mon directeur québécois, Srečko Brlek, qui ne compte pas le temps consacré à ses étudiants. Il m'a offert un cadre propice à la recherche, efficace et agréable. Il m'a encouragé à participer à de nombreuses conférences, à présenter nos résultats, à les rédiger et surtout à rencontrer et me faire connaître auprès des chercheurs du domaine.

Merci beaucoup à Valérie Berthé, ma codirectrice française, qui m'a accueilli à Montpellier et qui m'a fait participer à une vingtaine de conférences et activités à travers la France au cours desquelles j'ai rencontré des dizaines et des dizaines de chercheurs en informatique mathématique. Je dois aussi souligner tout le temps qu'elle m'a consacré et ses conseils toujours judicieux.

Merci aux membres, professeurs, personnels et cafés du LaCIM, à Montréal, un milieu social stimulant. Plus particulièrement, merci à Luc Bélair, François Bergeron, Pierre Bouchard, Alain Goupil, Christophe Hohlweg, Gilbert Labelle, Louise Laforest, Christophe Reutenauer et Franco Saliola pour les toutes les discussions que nous avons eues.

Merci à mon collègue Alexandre Blondin Massé qui rendait nos discussions mathématiques toujours fructueuses. Merci à mes coauteurs Laurent Vuillon, Michel Mendès France et Ariane Geron dont les idées m'ont beaucoup apporté.

Merci à Annie Lacasse, Xavier Provençal et Geneviève Paquin qui m'ont précédé au LaCIM et dont j'ai suivi les traces. Merci à nos amis les Discobols de Nîmes et en particulier à Pierril, Julie, Christophe, Léa, Florence et Alex qui nous ont accueillis dans leurs maisons et nous ont fait connaître la culture du sud de la France.

Merci à Franco Saliola, William Stein, Florent Hivert et Nicolas Thiéry dont j'ai appris beaucoup sur l'utilisation de l'ordinateur pour résoudre des problèmes mathématiques et notamment sur le logiciel Sage.

Merci à Julien Cassaigne, Thierry Monteil, Vincent Delecroix et Élise Vaslet pour leur accueil à Marseille, et surtout pour les discussions mathématiques, informatiques ou politiques que nous avons eues.

Merci à Philippe Langlois (Perpignan), Damien Jamet, Jacques-Oliver Lachaud, Paul Zimmerman, Christophe Fiorio, Gwénaél Richomme, Jean Berstel, Pierre Arnoux, Eric Andres et Arnaud Hilion avec lesquels j'ai eu des échanges ayant un impact certain sur mes recherches.

Merci à mes collègues Frédéric Rieux, Tarek Sellami, Louis-François Préville-Ratelle, Yannic Vargas, Carlos de la Mora et Timo Jolivet dont j'ai partagé la vie de thésard. Merci à Jérôme Tremblay, Christian Stump, Marco Robado et Franco Saliola pour leurs connaissances en Linux, Latex, Tikz et autres bidouilles informatiques. Merci à Vivien Ripoll et Fernand Beaudet pour les échanges que nous avons eus à propos du cours de calcul que nous donnions en parallèle à l'automne 2011.

Merci beaucoup à Lise Tourigny, secrétaire du LaCIM jusqu'en 2011 et notre mère à tous comme disait Srečko. Sa personnalité aura influencé l'ambiance et les habitudes du LaCIM même après son départ pour un autre département à l'UQAM. Merci aussi à Manon Gauthier qui a toujours su faciliter les démarches administratives au département de mathématiques.

Merci au CRSNG qui a financé mes études de doctorat et au FQRNT qui a facilité la réalisation de la cotutelle de doctorat.

Merci à mon frère Jean-Philippe et mes parents Madeleine et Jean qui ont grandement influencé l'évolution de ma pensée. Merci à tous mes amis de Montréal et du Québec avec lesquels je partage mes autres passions. Finalement, je dois offrir toute ma reconnaissance à ma compagne Renée pour son soutien avec qui la vie est si agréable.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xv
RÉSUMÉ	xvii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PRELIMINAIRES	11
1.1 Nombres	11
1.2 Combinatoire des mots	12
1.3 Morphismes	16
1.4 Langages	19
1.5 Géométrie discrète	24
1.6 Combinatoire des mots et chemins discrets	26
1.7 Mot de contour	29
CHAPITRE II	
STRUCTURE DES PAVAGES PAR UN POLYOMINO	33
2.1 <i>A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways</i>	36
2.2 <i>Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways</i>	46
2.3 <i>Fibonacci snowflakes</i>	57
2.4 Tuiles de Fibonacci duales	70
2.5 <i>Combinatorial properties of double square tiles</i>	84
CHAPITRE III	
COMPLEXITÉ PALINDROMIQUE	117
3.1 <i>Palindromic complexity of codings of rotations</i>	120
3.2 Quatre classes de complexité palindromique	133
3.3 Conjecture de Hof, Knill et Simon	133
3.4 Mots pleins	135

3.5	Mots dont le défaut est fini non nul	140
3.6	Mots dont le défaut est infini et de complexité palindromique infinie	141
3.7	Mots dont le défaut est infini et de complexité palindromique finie	144
3.8	Complexité palindromique des mots périodiques	154
3.9	Conclusion	156
CHAPITRE IV		
SEGMENTS DISCRETS ET DROITES DISCRÈTES 3D		159
4.1	Mots de Christoffel	160
4.1.1	Algorithme d'Euclide	161
4.1.2	Récurrence	163
4.2	Mots sturmiens	164
4.2.1	Droite discrète 2D	166
4.3	Droites discrètes 3D 6-connexes antérieures	166
4.3.1	Droite de Reveillès	167
4.3.2	Droite d'Andres	169
4.4	Combinatoire de la droite d'Andres	171
4.5	Le mot de Tribonacci	174
4.6	Algorithmes de fractions continues multidimensionnelles	178
4.7	Droites 3D engendrées par substitutions	183
4.7.1	Invariance sous une permutation	189
4.8	Critères de comparaison	189
4.8.1	Distance euclidienne	190
4.8.2	Discrépance	190
4.8.3	Complexité en facteurs	191
4.8.4	Équilibre	191
4.9	L'exemple (41, 11, 8)	191
4.10	Résultats expérimentaux	193
4.11	<i>An Arithmetic and Combinatorial Approach to Three-Dimensional Discrete Lines</i>	200

4.12 <i>Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies</i>	213
CONCLUSION	223
BIBLIOGRAPHIE	231

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
0.1	Correspondance entre la discrétisation d'une droite euclidienne et les mots sturmiens définis combinatoirement comme les mots possédant exactement $n + 1$ facteurs de longueur n	2
0.2	Quelques exemples de polyominos.	2
0.3	Déterminer si un ensemble de polyominos pave le plan est indécidable. . .	3
0.4	Contours d'une tuile carrée et d'une tuile hexagonale. Les deux images ne sont pas des polyominos, mais elles illustrent que les concepts de tuiles carrées et hexagonales peuvent être définis dans un contexte plus général. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux polyominos.	4
0.5	Étant donné une tuile carrée S et un polyomino P , la composition $S \circ P$ est obtenue en remplaçant chaque carré unité de P par une copie de S . Une tuile T est <i>indécomposable</i> si $T = S \circ P$ implique que P ou S est le carré unité.	5
0.6	Deux pavages périodiques distincts d'une tuile carrée.	5
1.1	Sur l'alphabet $A = \{1, 2, 3\}$, on représente le type d'extension $E(w)$ d'un facteur bispécial w par un tableau. Une croix (\times) est présente à l'intersection de la ligne a et de la colonne b si et seulement si $(a, b) \in E(w)$. . .	22
1.2	Polyominos k -connexes dont le complément est k' -connexe où $k, k' \in \{4, 8\}$. . .	25

- 1.3 Le chemin $w = \mathbf{01012223211}$. Le mot des différences finies $\Delta(w) = \mathbf{1311001330}$. Le chemin homologue $\hat{w} = \mathbf{33010003232}$. On vérifie que $\mathcal{T}(w) = -\mathcal{T}(\hat{w})$ 28
- 1.4 Le codage de Freeman d'un polyomino sur l'alphabet \mathcal{F} . Le mot de contour de cette tuile se factorise en 6 parties. C'est la factorisation de Beauquier-Nivat (Beauquier et Nivat, 1991a) considérée au Chapitre 2. . . 30
- 1.5 Le mot de contour $w = \mathbf{01033011212233}$ délimitant un polyomino 8-connexe n'est pas simple. Toutefois, le chemin $\Sigma_0([S(\Delta([w]))])$ est simple. Alors, on dit que w est sans croisement. 31
- 2.1 (a) Une tuile de Christoffel engendre deux pavages non symétriques du plan. (b) La tuile de Fibonacci d'ordre deux et ses deux pavages du plan. On remarque que ces tuiles doubles carrées sont invariantes par rotation de 180 degrés. 33
- 2.2 Trois tuiles doubles carrées qui ne sont ni de Christoffel ni de Fibonacci. Les deux factorisations carrées sont représentées par les points blancs et noirs. 34
- 2.3 (a) Une tuile carrée Q dont le mot de contour est $AB\hat{A}\hat{B} = \mathbf{00 \cdot 101 \cdot 22 \cdot 323}$. (b) Le morphisme homologue $\varphi_{A,B}$. (c) Un polyomino P dont le mot de contour est $u = \mathbf{00121001222333}$. (d) La tuile décomposable dont le mot de contour est $\varphi_{A,B}(u)$. (e) Le pentamino X est une tuile double carrée X dont le mot contour est $v = \mathbf{010121232303}$. (f) La tuile décomposable dont le mot de contour est $\varphi_{A,B}(v)$ est aussi une tuile double carrée. 35

2.4	(a) Une tuile carrée Q' dont le mot de contour est $AB\hat{A}\hat{B} = 0100 \cdot 11 \cdot 2232 \cdot 33$. À cette tuile carrée, on associe le morphisme $\varphi_{A,B}$ tel que $0 \mapsto A, 1 \mapsto B, 2 \mapsto \hat{A}, 3 \mapsto \hat{B}$. (b) Le pentomino X est une tuile double carrée X et son mot de contour est $v = 010121232303$. (c) La tuile décomposable dont le mot de contour est $\varphi_{A,B}(v)$ n'est pas invariante par rotation ρ^2 de 180 degrés.	36
2.5	Pavages de la tuile de Fibonacci duale d'ordre 1.	70
2.6	Pavages de la tuile de Fibonacci duale d'ordre 2.	71
2.7	Tuiles de Fibonacci duales d'ordre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	82
2.8	Tuiles de Fibonacci d'ordre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	82
3.1	Graphe du nombre de palindromes de mots représentatifs des quatres classes de complexité palindromique.	134
3.2	Proportion de mots pleins parmi les mots d'une longueur donnée sur un alphabet à 2, 3, 4 ou 5 lettres.	138
3.3	Graphe des 23 palindromes apparaissant dans le langage L_σ de la substitution $\sigma : a \mapsto abb, b \mapsto ba$. Une flèche relie les palindromes p aux palindromes $\alpha p \alpha$	146
3.4	Graphe des 9 palindromes apparaissant dans le mot infini périodique $(aababb)^\omega$. Une flèche relie les palindromes p aux palindromes $\alpha p \alpha$	152
3.5	Graphe de Rauzy du langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ de longueur 11 de complexité palindromique minimale.	155
4.1	Le chemin de Christoffel de pente 11/15 et le mot de Christoffel associé.	161

4.2	On obtient le mot de Christoffel \mathbf{w}_0 de pente 11/15 en inversant l'algorithme d'Euclide et associant à chaque matrice une substitution sur l'alphabet $\{a, b\}$. Les substitutions sont appliquées sur le mot initial $\mathbf{w}_4 = a$.	162
4.3	Illustration 2D de l'équivalence entre la droite d'Andres et un mot de billard.	174
4.4	Complexité en facteurs du préfixe p de longueur 10000 du mot \mathbf{w}_1	175
4.5	La droite discrète codée par le mot de Tribonacci.	178
4.6	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 20$ pour l'algorithme Poincaré	194
4.7	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Brun	194
4.8	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Selmer	195
4.9	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Fully subtractive	195
4.10	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Poincaré	196
4.11	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Arnoux-Rauzy . Cet algorithme n'est défini que pour les vecteurs dont la valeur maximale est plus grande que la somme des deux autres pour toutes les itérations de la fonction T_{AR}	196
4.12	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Arnoux-Rauzy-Selmer	197

4.13	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Arnoux-Rauzy-Brun .	197
4.14	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Arnoux-Rauzy-Fully subtractive .	198
4.15	Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme Arnoux-Rauzy-Poincaré .	198
4.16	La valeur d'équilibre peut subir une augmentation arbitrairement grande par une application de la substitution de Poincaré. Sur l'image, la valeur d'équilibre passe de $2B$ à $3B$.	226
4.17	Préimages d'ordre 0 et d'ordre 1 de la fonction de Poincaré \overline{T}_P .	227
4.18	Préimages d'ordre 2 de la fonction de Poincaré \overline{T}_P .	228
4.19	Préimages d'ordre 3 de la fonction de Poincaré \overline{T}_P .	229

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.1 Chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $0 \leq n \leq 8$	75
2.2 Chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $9 \leq n \leq 11$	76
2.3 Chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $12 \leq n \leq 14$	77
2.4 Les vecteurs des chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $n < 18$	78
3.1 Les quatre classes de complexité palindromique.	133
3.2 Nombre de mots pleins sur un alphabet de 2, 3, 4 ou 5 lettres selon la longueur n	136
3.3 Nombre de morphismes primitifs prolongeables sur la lettre a tels que $ \varphi(ab) \leq 11$ générant des points fixes se trouvant dans chacune des quatre classes de complexité palindromique. Bien qu'il existe des points fixes de morphisme sur un alphabet à deux lettres dont le défaut est fini non nul, aucun n'est tel que $ \varphi(ab) \leq 11$, d'où le 0 dans le tableau.	143
3.5 Justifications que $\alpha p \alpha \notin L_\sigma$ pour tous les palindromes $p \in P_{23}$ tels que $\alpha p \alpha \notin P_{23}$ où la substitution considérée est $\sigma : a \mapsto abb, b \mapsto ba$	147
3.6 Nombre de mots sur l'alphabet à deux, trois ou quatre lettres possédant un nombre minimal de palindromes.	150
4.1 Complexité en facteurs du mot $(abacabaacbaabacaba)^\omega$	172

4.2	Complexité en facteurs du préfixe p de longueur 10000 du mot w_1 . Les valeurs de $ L_n(p) $ sont inférieures à $n^2 + n + 1$ à partir de $n = 14$ car le préfixe p de longueur 10000 n'est pas assez long pour contenir tous les facteurs.	175
4.3	Matrices canoniques et substitutions associées à chaque algorithme. . . .	182
4.4	Statistiques pour la discrétance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 200$	199

RÉSUMÉ

Cette thèse, constituée d'une série d'articles, considère des questions issues de la géométrie discrète en les traitant du point de vue de la combinatoire des mots qui s'avère un outil puissant et approprié pour les résoudre. Nous utilisons les mots soit pour représenter un chemin dans \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z}^3 , soit pour coder la suite des virages d'un chemin ou le contour d'une figure discrète fermée. Parmi les thèmes abordés, on compte les pavages du plan par polyominos, la notion de complexité en facteurs palindromes et la génération de droites discrètes 3D.

La première partie concerne les pavages du plan où nous étudions le nombre de pavages réguliers du plan par une tuile carrée, c'est-à-dire une tuile ayant quatre tuiles adjacentes identiques. Il s'avère que certaines tuiles carrées pavent le plan de deux façons distinctes et elles sont appelées doubles carrées. Nous démontrons d'abord qu'il y a au plus deux tels pavages réguliers par une tuile carrée. Ensuite, nous considérons deux familles particulières de tuiles doubles carrées : les tuiles de Christoffel et les tuiles de Fibonacci. Ces deux familles décrivent les plus petits exemples de tuiles doubles carrées et peuvent être définies à partir des mots de Christoffel et du mot de Fibonacci par des règles de substitution et de concaténation. Les tuiles de Fibonacci définissent aussi une fractale, obtenue par un chemin auto-évitant, dont nous avons calculé plusieurs statistiques, comme le rapport de l'aire de la fractale sur l'aire de son enveloppe convexe. Dans l'article suivant, nous démontrons que tout double carré indécomposable est invariant sous une rotation de 180 degrés. Cette propriété géométrique est équivalente au fait que le mot de contour de la tuile se factorise en un produit de palindromes. Notre preuve repose sur une méthode de génération exhaustive des tuiles doubles carrées.

La deuxième partie concerne la complexité palindromique - le nombre de facteurs palindromes distincts -, un sujet propre à la combinatoire des mots. Nous y considérons quatre classes de complexité palindromique qui découlent naturellement de la notion de défaut. Nous caractérisons notamment les mots de complexité palindromique minimale sur un alphabet à deux lettres et nous démontrons que les mots infinis obtenus par codage de rotations sur deux intervalles atteignent la complexité palindromique maximale.

Dans une troisième partie, nous proposons une méthode basée sur des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles pour la génération de droite discrètes 3D 6-connexes. Les expérimentations illustrent que la complexité en facteurs des mots ainsi générés serait linéaire. Cela se compare avantageusement aux autres définitions de droites discrètes 3D 6-connexes dont la complexité en facteurs est quadratique.

Les articles contenus dans la thèse sont énumérés ci-bas.

Articles sur la structure des pavages par un polyomino :

- A. Blondin Massé, S. Brlek and S. Labbé, A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways, *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012) 1011–1018. doi:10.1016/j.dam.2011.12.023
- A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon and S. Labbé, Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways, *Theoret. Comput. Sci.* 412 (2011) 4778–4786. doi:10.1016/j.tcs.2010.12.034
- A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé and M. Mendès France, Fibonacci snowflakes, *Ann. Sci. Math. Québec* 35 (2011), no 2, 141–152.
- A. Blondin Massé, A. Garon and S. Labbé, Combinatorial properties of double square tiles, *Theoretical Computer Science* (2012), accepté.

Un article sur la complexité palindromique :

- A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé and L. Vuillon, Palindromic complexity of codings of rotations, *Theoret. Comput. Sci.* 412 (2011) 6455–6463. doi:10.1016/j.tcs.2011.08.007

Deux articles de conférences sur les droites discrètes 3D :

- V. Berthé, et S. Labbé. An arithmetic and combinatorial approach to three-dimensional discrete lines. Dans *Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery*, 47–58. DGCI'11. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.
- V. Berthé and S. Labbé, Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies, In Petr Ambrož, Štěpán Holub and Zuzana Masáková : *Proceedings 8th International Conference Words 2011 (WORDS 2011)*, Prague, Czech Republic, 12–16th September 2011, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 63, pp. 44–52.

Mots-clés : combinatoire des mots ; géométrie discrète ; pavage ; polyomino ; complexité palindromique ; droite discrète ; algorithme de fractions continues multidimensionnelles.

INTRODUCTION

La représentation d'objets sous forme de suite de symboles est naturelle et largement présente dans la littérature scientifique. La langue écrite et l'écriture des nombres dans une base sont sans doute les premiers pas dans cette lignée. Les séquences biologiques telles l'ADN et les protéines sont des exemples plus contemporains. Les origines de la combinatoire des mots aux 19^e et 20^e siècles ont été examinées en détails dans un article de Berstel et Perrin en 2007 (Berstel et Perrin, 2007). Les ouvrages de M. Lothaire (Lothaire, 2002; Lothaire, 2005) et de Pytheas Fogg (Fogg, 2002) illustrent les aspects algébriques de la combinatoire des mots et ses applications dans divers domaines dont les algorithmes de recherche de motifs dans un texte qui sont possibles grâce à la représentation de données dans un langage informatique.

Un autre domaine d'application de la combinatoire des mots est la géométrie discrète et c'est dans ce cadre que se situe cette thèse de doctorat. La relation entre ces deux domaines est bien connue et un lien classique entre eux est certainement le codage d'un chemin dans \mathbb{Z}^2 , aussi appelé codage de Freeman (Freeman, 1961; Freeman, 1970), par un mot sur un alphabet $A = \{0, 1, 2, 3\}$ où chaque lettre $a \in A$ est associée à un vecteur de \mathbb{Z}^2 . Le fait qu'un chemin dans \mathbb{Z}^2 soit la discrétisation d'une droite euclidienne est équivalent à des conditions sur le nombre de facteurs (sous-mots de lettres consécutives) dans le mot associé. Cette équivalence démontrée par Morse et Hedlund en 1940 a créé un pont entre la théorie des nombres et la combinatoire (Figure 0.1).

La combinatoire des mots est utile aussi dans la description et l'étude des figures discrètes appelées *polyominoes*, sous-ensembles 4-connexes et sans trou de \mathbb{Z}^2 (Figure 0.2). Il s'agit de considérer le bord du polyomino, un chemin fermé, et de le représenter par un mot de A^* appelé *mot de contour*. À partir du mot de contour, on peut calculer (Lacasse, 2008; Brlek, Labelle et Lacasse, 2005a; Brlek, Labelle et Lacasse, 2006) plusieurs

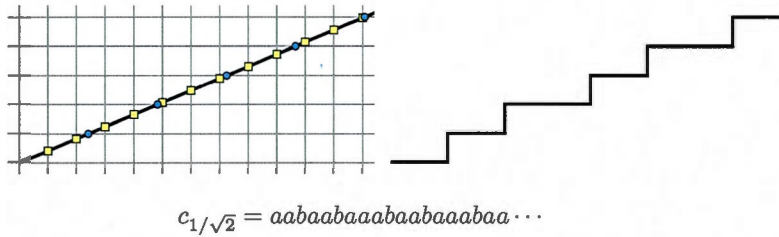


Figure 0.1 Correspondance entre la discrétisation d'une droite euclidienne et les mots sturmiens définis combinatoirement comme les mots possédant exactement $n+1$ facteurs de longueur n .

statistiques du polyomino, dont l'aire, le moment d'inertie, les projections horizontales et verticales, son centre de masse. Un autre problème en géométrie discrète est de déter-

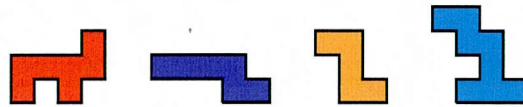


Figure 0.2 Quelques exemples de polyominos.

miner si une figure discrète est convexe (l'adaptation de cette notion au monde discret n'est pas triviale). (Brlek, Lachaud et Provençal, 2008; Brlek et al., 2009) ont proposé un algorithme rapide et optimal pour détecter la convexité d'un polyomino codé par son mot de contour. La méthode est basée sur la factorisation de Lyndon et la reconnaissance de facteurs sturmiens. En évitant les calculs arithmétiques, l'algorithme est conceptuellement plus simple que les méthodes connues (Debled-Rennesson, Rémy et Rouyer-Degli, 2003), et plus rapide en pratique.

Dans ce texte, nous montrons que la combinatoire des mots peut encore contribuer à la géométrie discrète en illustrant le fait que certaines questions peuvent être résolues grâce à des techniques nouvelles basées sur la combinatoire des mots. Cette thèse se divise en trois parties :

- Structure des pavages par un polyomino,
- Complexité palindromique,

– Droites discrètes 3D.

Structure des pavages par un polyomino

Un *pavage* est une partition d'un espace par un ensemble fini d'éléments appelés tuiles. Un *pavage par translation* est un pavage où deux copies de la même tuile sont isométriques par translation. Dans la suite, on considère le pavage du plan par des tuiles polygonales. Le *problème du domino* ou *problème du pavage*, consistant à déterminer si un ensemble de tuiles peut paver le plan, est indécidable (Berger, 1966). Berger répondait ainsi à la question de son professeur Hao Wang qui avait conjecturé en 1961 l'existence d'un algorithme pouvant répondre à cette question. Pour y arriver, il avait réduit le problème du pavage au problème de l'arrêt d'une machine de Turing connu comme étant indécidable. Il avait aussi démontré l'existence d'un ensemble de 20426 tuiles de Wang (et plus tard d'un ensemble de 104 tuiles) qui pavent uniquement de façon apériodique. Ce nombre a été réduit par la suite par Penrose puis a été réduit à 14 par (Kari, 1996) et à 13, le minimum connu, l'année suivante (Culik et Kari, 1997).

Pendant ce temps, (Golomb, 1970) a démontré que le problème du pavage du plan par des copies d'un ensemble fini de polyominos était équivalent au problème du domino (donc aussi indécidable) en associant des ensembles de tuiles de Wang à des ensembles de polyominos (voir Figure 0.3). Malgré tout, il existe un algorithme qui détermine si

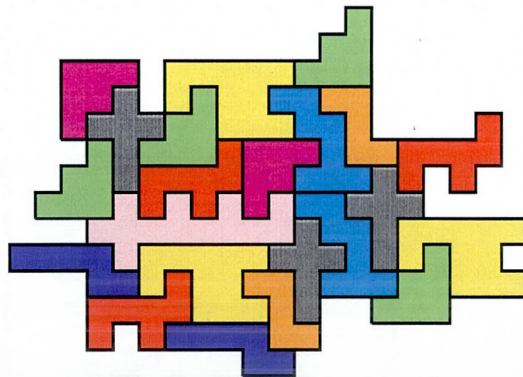


Figure 0.3 Déterminer si un ensemble de polyominos pave le plan est indécidable.

un polyomino pave le plan par translation (Wijshoff et Van Leeuwen, 1984, Théorème 6.1). Hélas, si les rotations et les symétries sont autorisées, on ne sait pas si le problème du pavage par un polyomino est décidable (Keating et Vince, 1999; Rhoads, 2005).

Pour qu'un polyomino pave le plan (rotations et réflexions permises), une condition suffisante est donnée par le *critère de Conway* (Schattschneider, 1980; Rhoads, 2005) : la frontière du polyomino doit être composée de deux ou trois paires de côtés qui s'encastrent. Par la suite, (Beauquier et Nivat, 1990; Beauquier et Nivat, 1991b) ont démontré que cette condition était aussi nécessaire pour les pavages par translation. Plus précisément, ils ont énoncé qu'un polyomino P pave le plan par translation si et seulement si le mot de contour de P se factorise en $XYZ\widehat{X}\widehat{Y}\widehat{Z}$ où au plus un des mots X , Y et Z est vide et où \widehat{W} est le mot correspondant au chemin W parcouru en sens inverse. Un polyomino qui pave le plan par translation est appelé *hexagone* ou *tuile hexagonale* si chacun des mots X , Y et Z est non vide, et *carré* ou *tuile carrée* si exactement l'un d'entre eux est vide (voir Figure 0.4).

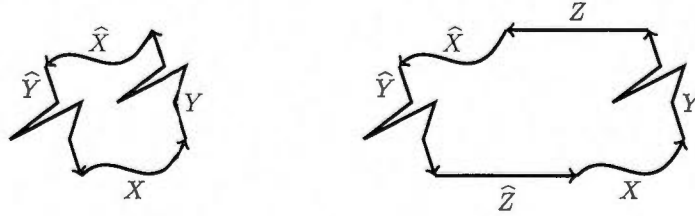


Figure 0.4 Contours d'une tuile carrée et d'une tuile hexagonale. Les deux images ne sont pas des polyominos, mais elles illustrent que les concepts de tuiles carrées et hexagonales peuvent être définis dans un contexte plus général. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux polyominos.

Grâce à cette caractérisation de Beauquier et Nivat, la combinatoire des mots s'avère utile pour étudier la structure de ces pavages particuliers. En effet, il a été démontré récemment qu'il existe un algorithme en temps linéaire qui à partir du mot de contour peut déterminer si un polyomino est une tuile carrée. Ce résultat est basé sur l'utilisation de structures de données bien adaptées permettant de déterminer si un mot décrit un

chemin fermé auto-évitant (Brlek, Koskas et Provençal, 2011), et d'en extraire la factorisation de Beauquier-Nivat (Brlek et Provençal, 2006; Provençal, 2008; Brlek, Provençal et Fédou, 2009). Dans sa thèse, Xavier Provençal a remarqué qu'il existe des tuiles carrées possédant deux factorisations $XY\widehat{X}\widehat{Y}$ et $WZ\widehat{W}\widehat{Z}$ distinctes. En 2007, Brlek, Dulucq, Fédou et Provençal ont énoncé la conjecture à l'effet qu'une tuile ne peut posséder trois factorisations carrées. Dans cette thèse, nous démontrons cette conjecture.

Théorème 0.1 (Blondin Massé, Brlek, Garon, Labbé, 2012). *Toute tuile ne peut paver le plan en plus de deux manières distinctes en ayant quatre polyominos adjacents.*

Une tuile possédant deux factorisations distinctes est appelée *double carré* ou *tuile double carrée*. En observant quelques exemples, Provençal et Vuillon ont remarqué que les tuiles double carrées indécomposables (voir Figure 0.5) sont invariantes par rotation de 180 degrés (voir Figure 0.6). Dans cette thèse, nous démontrons aussi cette conjecture.

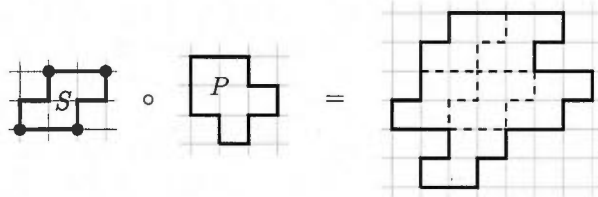


Figure 0.5 Étant donné une tuile carrée S et un polyomino P , la composition $S \circ P$ est obtenue en remplaçant chaque carré unité de P par une copie de S . Une tuile T est *indécomposable* si $T = S \circ P$ implique que P ou S est le carré unité.

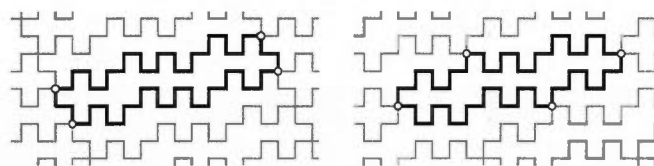


Figure 0.6 Deux pavages périodiques distincts d'une tuile carrée.

Théorème 0.2 (Blondin Massé, Garon, Labbé, 2012). *Si $XY\widehat{X}\widehat{Y}$ et $WZ\widehat{W}\widehat{Z}$ sont les factorisations distinctes d'une tuile double carrée indécomposable D , alors X , Y , W et*

Z sont des palindromes. Autrement dit, D est invariant par rotation de 180 degrés.

Complexité palindromique

Comme on l'a vu plus tôt, les droites discrètes de \mathbb{Z}^2 correspondent aux mots sturmiens. Or, les palindromes jouent un rôle fondamental dans la structure des mots sturmiens. En effet, (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) ont démontré qu'un mot de longueur n possède au plus $n + 1$ palindromes, et que les facteurs sturmiens atteignent cette borne. Dans cette thèse, nous généralisons ce résultat aux codages de rotations sur deux intervalles.

Théorème 0.3 (Blondin Massé, Brlek, Labbé, Vuillon, 2011). *Tout facteur de longueur n d'un codage de rotations sur deux intervalles possède $n + 1$ palindromes.*

Droites discrètes 3D

En géométrie discrète, on s'intéresse aussi aux généralisations en dimension trois des objets bien connus en dimension 2. Les approches arithmétiques ont mené à des définitions basées sur des inégalités. Par exemple, le modèle de la droite 3D de Reveillès (Figueiredo et Reveillès, 1996) de vecteur directeur (a, b, c) est définie par l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ vérifiant les inégalités diophantiennes suivantes :

$$\begin{aligned} -(a + c)/2 &\leq cx - az < (a + c)/2, \\ -(a + b)/2 &\leq bx - ay < (a + b)/2, \\ -(b + c)/2 &\leq cy - bz < (b + c)/2. \end{aligned}$$

Toutefois, les mots qui codent la droite discrète 3D correspondent aux mots de billard bien connus en combinatoire des mots. Leur complexité en facteurs est quadratique (Arnoux et al., 1994; Baryshnikov, 1995). Cela est insatisfaisant au regard des mots sturmiens dont la complexité est linéaire. La définition de droite discrète 3D que nous proposons est combinatoire, engendrée par substitutions et basée sur des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles. De plus, les résultats expérimentaux indiquent que les droites que nous construisons ont une complexité linéaire en facteurs.

Structure de la thèse

Le Chapitre 1 rappelle les définitions usuelles de la combinatoire des mots et de la géométrie discrète utilisées dans cette thèse.

Le Chapitre 2 aborde les tuiles doubles carrées. Le travail est fait en commun avec Srečko Brlek, Ariane Garon, Alexandre Blondin Massé et Michel Mendès France. Il contient quatre articles. On y démontre deux résultats (Théorèmes 0.1 et 0.2). Le premier figure dans l'article (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2012), version étendue d'une présentation effectuée à la Conférence Lattice Path en Italie en juillet 2010 (Blondin Massé et al., 2011b). L'approche utilisée se base sur les propriétés topologiques des chemins ainsi que sur la combinatoire des mots. Ce chapitre contient aussi l'article (Blondin Massé et al., 2011c) qui porte sur les tuiles de Christoffel et les tuiles de Fibonacci que nous avons d'abord présenté à la conférence DGCI 2009 à Montréal (Blondin Massé et al., 2009a). Puis dans (Blondin Massé et al., 2011a), nous nous sommes intéressés aux propriétés combinatoires des tuiles de Fibonacci et à la fractale qu'elles définissent. La section suivante porte sur une généralisation des résultats à un autre type de tuiles souvent exclues de la définition des polyominos, car elles ne sont pas 4-connexes. Le deuxième théorème est démontré dans l'article (Blondin Massé, Garon et Labbé, 2012) version étendue d'un article de conférence présenté à GASCom à Montréal en 2010 (Blondin Massé, Garon et Labbé, 2010). Nous y proposons une méthode pour engendrer toutes les tuiles doubles carrées.

Le Chapitre 3 porte sur les systèmes dynamiques discrets, la combinatoire des mots et la complexité palindromique. Le travail est fait en commun avec Laurent Vuillon, Alexandre Blondin Massé et Srečko Brlek. On y démontre que les mots obtenus par codage de rotation sur deux intervalles atteignent la complexité palindromique maximale.

Au Chapitre 4, on étudie une nouvelle approche pour définir des droites discrètes 3D. Ce travail est fait conjointement avec Valérie Berthé. En se basant sur les algorithmes de fractions continues généralisées, on construit des mots qui se rapprochent de la droite

euclidienne. Notre contribution consiste en la construction d'une droite discrète 3D en se basant sur l'exécution des algorithmes de fractions continues puis d'en fusionner certains afin d'obtenir de nouveaux algorithmes aux propriétés prometteuses. Les expérimentations effectuées confirment que les droites construites ont une complexité linéaire en facteurs alors que la droite de Andres, bien connue en géométrie discrète, possède un nombre quadratique de facteurs.

Contributions au développement du logiciel libre Sage

Au cours de la préparation de cette thèse, plus de 80 contributions furent effectuées au logiciel libre Sage (Stein et al., 2012a; Labbé, 2011b), la plupart via le groupe Sage-Combinat (Sage-Combinat community, 2012), totalisant plusieurs milliers de lignes de code. La première fut disponible dans la version Sage-3.2.1 publiée le premier décembre 2008. La majeure partie des contributions ont été incluses dans la librairie sur la combinatoire des mots dont le code est disponible dans le répertoire `sage/combinat/words` (Stein et al., 2012b). Plusieurs contributions ont amélioré les fonctions graphiques permettant la visualisation 2D et 3D en Sage. Finalement, une contribution notable est l'utilisation de la méthode des liens dansants de Knuth (Knuth, 2000) pour résoudre des problèmes de pavage de boîtes rectangulaires en dimension quelconque (Labbé, 2011a).

Des exemples Sage dans la thèse

Les explorations informatiques ont joué un rôle important dans le développement des résultats présentés dans cette thèse. Le lecteur trouvera souvent dans le texte des exemples complémentaires en Sage qui aident à la compréhension. Ils devraient lui permettre de construire et tester des exemples de son choix en utilisant le logiciel libre Sage. Par exemple, voici la commande permettant de créer le mot sturmien de pente $1/\sqrt{2}$ illustré à la Figure 0.1.

```
sage: words.CharacteristicSturmianWord(1/sqrt(2), 'ba')
word: aabaabaabaabaabaabaabaabaabaabaabaaba...
```

Articles inclus dans cette thèse

Sept articles dont deux articles de conférences sont inclus dans cette thèse.

Articles sur la structure des pavages par un polyomino :

- A. Blondin Massé, S. Brlek and S. Labbé, A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways, *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012) 1011-1018. doi:10.1016/j.dam.2011.12.023
- A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon and S. Labbé, Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways, *Theoret. Comput. Sci.* 412 (2011) 4778-4786. doi:10.1016/j.tcs.2010.12.034
- A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé and M. Mendès France, Fibonacci snowflakes, *Ann. Sci. Math. Québec* 35 (2011), no 2, 141-152.
- A. Blondin Massé, A. Garon and S. Labbé, Combinatorial properties of double square tiles, *Theoretical Computer Science* (2012), accepté.

Un article sur la complexité palindromique :

- A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé and L. Vuillon, Palindromic complexity of codings of rotations, *Theoret. Comput. Sci.* 412 (2011) 6455-6463. doi:10.1016/j.tcs.2011.08.007

Deux articles de conférences sur les droites discrètes 3D :

- V. Berthé, et S. Labbé. An arithmetic and combinatorial approach to three-dimensional discrete lines. In *Proceedings of the 16th IAPR Int. Conf. on Discrete geometry for Computer Imagery*, 47–58. DGCI'11. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.
- V. Berthé and S. Labbé, Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies, In Petr Ambrož, Štěpán Holub and Zuzana Masáková : *Proceedings 8th Int. Conf. on Words 2011 (WORDS 2011)*, Prague, Czech Republic, 12-16th September 2011, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 63, pp. 44–52.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous introduisons toutes les définitions et les notations relatives aux mots, aux morphismes, aux chemins, à la géométrie discrète et aux pavages.

1.1 Nombres

Comme d'habitude, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} désignent respectivement l'ensemble des nombres naturels, des entiers relatifs, des nombres rationnels et des nombres réels. On écrit $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour représenter l'ensemble des entiers strictement positifs. Deux nombres $a, b \in \mathbb{Z}$ sont dit *premiers deux à deux* si le plus grand commun diviseur (pgcd) de a et b est 1. De plus, le vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ est dit *totalement irrationnel* si les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont rationnellement indépendants, c'est-à-dire si pour tout $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$,

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Tout nombre rationnel qui n'est pas un entier possède un unique *développement en fractions continues*

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

où a_0 est un entier et $a_i, i \geq 1$, sont des entiers strictement positifs avec $a_n \geq 2$. De plus,

tout nombre réel irrationnel ζ possède un unique développement en fraction continues

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\ddots}}}}$$

où a_0 est un entier et $a_i, i \geq 1$, sont des entiers strictement positifs. Une fraction continue finie sera notée $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ et une fraction continue infinie sera notée $[a_0, a_1, \dots]$. Par exemple, on a que

$$\begin{aligned} \frac{11243}{12335} &= [0, 1, 10, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 15], \\ \pi &= [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \dots]. \end{aligned}$$

Les entiers a_0, a_1, \dots sont appelés *quotients partiels*. Pour $n \geq 1$, le nombre rationnel $p_n/q_n := [a_0, a_1, \dots, a_n]$ est appelé le *quotient incomplet d'indice n* de ζ .

1.2 Combinatoire des mots

Nous empruntons à (Lothaire, 2002) toute la terminologie de base sur les mots. Dans ce qui suit, Σ est un *alphabet* fini dont les éléments sont appelés des *lettres*. Un *mot* est une suite finie de lettres $w : [0, 1, 2, \dots, n-1] \rightarrow \Sigma$, où $n \in \mathbb{N}^+$. La longueur de w est $|w| = n$ et w_i désigne sa i -ème lettre. L'ensemble des mots de longueur n sur Σ est noté Σ^n . Par convention le mot *vide* est noté ε et sa longueur est 0. Étant donné un mot non vide w , $\text{FST}(w) = w_0$ et $\text{LST}(w) = w_{n-1}$ représentent respectivement la première et la dernière lettre de w . Le monoïde libre engendré par Σ est défini par $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$. L'ensemble des mots infinis à droite est noté $\Sigma^\mathbb{N}$ et nous désignons $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\mathbb{N}$. Étant donné un mot $w \in \Sigma^\infty$, un *facteur* f de w est un mot $f \in \Sigma^*$ satisfaisant

$$\exists x \in \Sigma^*, y \in \Sigma^\infty, w = xfy.$$

Si $x = \varepsilon$ (resp. $y = \varepsilon$) alors f est appelé *préfixe* (resp. *suffixe*) de w . Le préfixe (resp. suffixe) de w de longueur d est noté $\text{pref}_d(w)$ (resp. $\text{suff}_d(w)$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n(w)$

est l'ensemble des facteurs de longueur n de w alors que $L(w)$ est l'ensemble de tous les facteurs de w et est appelé le *langage* de w . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $p_w(n)$ la cardinalité de $L_n(w)$. Ainsi, $p_w(n)$ est une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ appelée *fonction de complexité* de w . Lorsque le contexte est clair, on note la fonction de complexité simplement par $p(n)$. Un mot *sturmien* est un mot infini u tel que $p(n) = |L_n(u)| = n + 1$. Finalement, $\text{Pref}(w)$ désigne l'ensemble de tous les préfixes de w et $\text{Suff}(w)$, l'ensemble de tous les suffixes. Le nombre d'occurrences d'un facteur $f \in \Sigma^*$ est $|w|_f$. Si $|w|_f = 1$, on dit que le facteur f est *unioccurent* dans w . Si $w = pu$, alors $p^{-1}w = u$ est le mot obtenu en effaçant p et wu^{-1} est le mot obtenu en effaçant u . Une *période* d'un mot w est un entier $p < |w|$ tel que $w[i] = w[i + p]$, pour tout $i < |w| - p$. Si un mot w possède une période, on dit qu'il est *périodique* et *apériodique* sinon. Un résultat important sur les mots et les périodes est le suivant attribué à Fine et Wilf.

Théorème 1.1. (Lothaire, 2002, Théorème 8.1.4) *Soit w un mot ayant des périodes p et q . Si $|w| \geq p + q - \text{pgcd}(p, q)$, alors $\text{pgcd}(p, q)$ est aussi une période de w .* \square

Le mot w^n est la *puissance entière* d'exposant $n \in \mathbb{N}$ de w . Il est défini récursivement en posant $w^0 = \varepsilon$ et $w^n = w^{n-1}w$ pour $n > 0$. On dit que r est la *puissance d'exposant rationnel* $\frac{|r|}{|w|}$ de w si $r = w^n u$ où u est un préfixe de w et on écrit $r = w^{|r|/|w|}$. On dit qu'un mot est *primitif* s'il n'est pas la puissance entière d'un *autre* mot. On forme le mot infini périodique, noté w^ω , par des concaténations infinies d'un mot fini w :

$$w^\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} w^n = www \dots$$

Un mot infini w est *récurrent* s'il satisfait à la condition $u \in L(w) \implies |w|_u = \infty$. Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et w un mot. Le plus petit nombre naturel m (s'il existe) tel que tout facteur de longueur m de w contient tout facteur de longueur n de w est appelé le *n -ème indice de récurrence* $R_w(n)$ de w (Morse et Hedlund, 1938). Si $R_w(n)$ existe quel que soit $n \in \mathbb{N}^+$, alors w est dit *uniformément récurrent*. Clairement, un mot périodique infini est uniformément récurrent. En effet, si p est sa période, alors tout facteur de longueur n est contenu dans tout facteur de longueur $n + p - 1$. Deux mots u et v sont

conjugués, noté $u \equiv v$, s'il existe des mots x, y tels que $u = xy$ et $v = yx$. Notons que la longueur est invariante sous la conjugaison. La *classe de conjugaison* d'un mot w est noté $[w]$ et est une classe d'équivalence. De plus, le *miroir* de $u = u_1 u_2 \dots u_n \in \Sigma^n$ est le mot $\tilde{u} = u_n u_{n-1} \dots u_1$. Un *palindrome* est un mot p tel que $p = \tilde{p}$, et l'ensemble de tous les palindromes d'un langage $L \subseteq \Sigma^\infty$ est noté $\text{Pal}(L)$. De plus, pour un mot $w \in \Sigma^*$, l'ensemble de ses facteurs palindromes est $\text{Pal}(w) = \text{Pal}(\Sigma^*) \cap L(w)$ et l'ensemble de ceux de longueur n est $\text{Pal}_n(w) = \text{Pal}(\Sigma^*) \cap L_n(w)$. La *complexité palindromique* d'un mot w est le nombre $|\text{Pal}(w)|$. Un mot w est dit *symétrique* s'il est le produit de deux palindromes, et *asymétrique* sinon. De plus, le conjugué d'un mot symétrique est symétrique. Un mot w est *k-équilibré* si

$$||u|_i - |v|_i| \leq k,$$

pour toute lettre $i \in \mathcal{A}$ pour tout facteur u et v de w de même longueur $|u| = |v|$.

L'*équilibre* de $w = w_0 \dots w_n \in \mathcal{A}^{n+1}$ est défini comme

$$\text{Eq}(w) = \sup_{i \in \mathcal{A}, |u|=|v|} ||u|_i - |v|_i|,$$

où u et v sont des facteurs de w de la même longueur $|u| = |v|$.

La transformée de Burrows-Wheeler a été introduite en 1994 par (Burrows et Wheeler, 1994) et est un outil efficace pour la compression de données. L'idée est d'appliquer une transformation inversible qui produit une permutation $BWT(w)$ d'un mot donné $w = w_1 \dots w_n$ défini sur un alphabet ordonné A de façon à créer une suite plus facile à compresser. Cette transformation tend à regrouper les mêmes lettres : elle consiste à trier lexicographiquement les n conjugués de w et d'en extraire la dernière lettre. La suite $BWT(w)$ est la concaténation de ces lettres. Il y a des relations entre la transformée de Burrows-Wheeler et la combinatoire des mots, notamment avec les mots sturmiens (Mantaci, Restivo et Sciortino, 2003) et la complexité palindromique (Restivo et Rosone, 2009).

Exemple 1.2. Soit $w = xxyxy$. Les cinq conjugués de w sont

xxyxy

xyxxy

xyxyx

yxyx

yxxyx

Les premières lettres (soulignées ci-haut) des cinq conjugués de w triés lexicographiquement donnent la suite $BWT(w) = xxyxy$. On remarque que les lettres x et y ont été effectivement regroupées.

La transformée de Burrows-Wheeler est utilisée à la section 3.4 en relation avec la complexité palindromique.

Mot de Fibonacci

On définit la suite de mots (f_n) par les règles $f_{-1} = b$, $f_0 = a$ et, pour $n \geq 1$,

$$f_n = f_{n-1}f_{n-2}.$$

Ainsi, les premières valeurs sont

$$f_0 = a$$

$$f_1 = ab$$

$$f_2 = aba$$

$$f_3 = abaab$$

$$f_4 = abaababa$$

$$f_5 = abaababaabaab$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Le mot infini $\mathbf{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est appelé le *mot de Fibonacci* et est un mot sturmien.

Mot de Thue-Morse (Thue, 1912; Morse et Hedlund, 1938)

On définit la suite de mots (t_n) par la règle $t_0 = a$ et, pour $n \geq 1$,

$$t_n = t_{n-1} \overline{t_{n-1}}$$

où $\bar{a} = b$ et $\bar{b} = a$ de sorte que les premiers termes sont

$$\begin{aligned} t_0 &= a \\ t_1 &= ab \\ t_2 &= abba \\ t_3 &= abbabaab \\ t_4 &= abbabaabbaababba \\ t_5 &= abbabaabbaababbabaababbaabababab \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le mot infini $\mathbf{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ est appelé le *mot de Thue-Morse*. Le mot de Thue-Morse n'est pas sturmien, car il contient 4 facteurs de longueurs 2.

1.3 Morphismes

Un *morphisme* est une fonction $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ compatible avec la concaténation, c'est-à-dire tel que $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ pour tout $u, v \in \Sigma^*$. Dans ce texte, on utilise aussi le terme *substitution*, bien que plus général, comme synonyme de morphisme.

Le morphisme identité sur Σ est noté Id_Σ . Certains morphismes sont bien connus sur l'alphabet à deux lettres $\Sigma = \{a, b\}$: par exemple, le morphisme de Fibonacci (Séébold, 1991) $\Phi : a \mapsto ab, b \mapsto a$ et le morphisme de Thue-Morse (Thue, 1912; Morse et Hedlund, 1938) $\mu : a \mapsto ab, b \mapsto ba$. On remarque que les mots \mathbf{f} et \mathbf{t} sont des points fixes de ces

morphismes : $\Phi(f) = f$ et $\mu(t) = t$. On a également le morphisme $E : a \mapsto b, b \mapsto a$ qui échange les lettres.

Un morphisme φ est dit *sturmien* si $\varphi(w)$ est un mot sturmien pour tout mot sturmien w .

Théorème 1.3. (Mignosi et Séébold, 1993) *L'ensemble des morphismes sturmiens sur $\Sigma = \{a, b\}$ forme un monoïde engendré par les morphismes E, Φ et $\tilde{\Phi}$, où Φ est le morphisme de Fibonacci.* \square

Un morphisme φ est *primitif* s'il existe un nombre naturel k tel que, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\varphi^k(\alpha)$ contient toutes les lettres de Σ . Pour $\alpha \in \Sigma$, on appelle φ -*bloc* (*bloc* s'il n'y a pas de confusion) un facteur de la forme $\varphi(\alpha)$. On définit la fonction $|\varphi| : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ par $|\varphi|(\alpha) = |\varphi(\alpha)|$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Un morphisme est dit *uniforme* quand les blocs sont de longueur égale, c'est-à-dire, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\varphi(\alpha)| = k$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

Exemple 1.4. *Le morphisme de Thue-Morse μ est primitif et uniforme. Celui de Fibonacci Φ est aussi primitif mais pas uniforme.* \diamond

Un morphisme φ est dit *effaçant* s'il existe $\alpha \in \Sigma$ tel que $\varphi(\alpha) = \varepsilon$. Un morphisme φ est *croissant* si $|\varphi(\alpha)| \geq 2$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

Lemme 1.5. *Soit $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ un morphisme primitif où $|\Sigma| \geq 2$. Il existe un entier k tel que φ^k est un morphisme croissant.*

Démonstration. Soit k tel que pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\varphi^k(\alpha)$ contient toutes les lettres de Σ . Ainsi, $|\varphi^k(\alpha)| \geq |\Sigma| \geq 2$. Donc, φ^k est un morphisme croissant. \square

Un morphisme φ est une *involution* si $\varphi^2 = \text{Id}$.

Exemple 1.6. *Le morphisme E est la seule involution non triviale sur $\Sigma = \{a, b\}$.* \diamond

Le *miroir* d'un morphisme φ , noté $\tilde{\varphi}$, est le morphisme tel que $\tilde{\varphi}(\alpha) = \widetilde{\varphi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Il est facile de vérifier que

$$\widetilde{\varphi(w)} = \tilde{\varphi}(\tilde{w}) \quad \text{pour tout } w \in \Sigma^*; \quad \widetilde{\varphi \circ \mu} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\mu}. \quad (1.1)$$

Un *antimorphisme* est une fonction $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ telle que $\varphi(uv) = \varphi(v)\varphi(u)$ pour tout $u, v \in \Sigma^*$. Un antimorphisme φ est *involutif* si $\varphi^2 = \text{Id}$. Pour référence ultérieure, on liste les propriétés suivantes faciles à établir.

Lemme 1.7. *Soit $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, une fonction. On a que*

- (i) \simeq est un antimorphisme involutif;
- (ii) φ est un morphisme si et seulement si $\varphi \circ \simeq$ est un antimorphisme;
- (iii) si φ est un morphisme et que $\varphi(\alpha)$ est un palindrome pour tout $\alpha \in \Sigma$, alors $\varphi \circ \simeq = \simeq \circ \varphi$.

On trouve, dans la section 2.3.4 de (Lothaire, 2002), que φ est *conjugué à droite* de φ' , noté $\varphi \triangleleft \varphi'$, s'il existe $u \in \Sigma^*$ tel que

$$\varphi(\alpha)u = u\varphi'(\alpha), \quad \text{pour tout } \alpha \in \Sigma, \quad (1.2)$$

ou de façon équivalente que $\varphi(x)u = u\varphi'(x)$, pour tout mot $x \in \Sigma^*$. Il est clair que cette relation n'est pas symétrique de sorte que l'on dit alors que deux morphismes φ et φ' sont *conjugués* si $\varphi \triangleleft \varphi'$ ou $\varphi' \triangleleft \varphi$. La relation de conjugaison des morphismes est une relation d'équivalence.

Exemple 1.8. *Soit $\varphi_1 : a \mapsto bbaba, b \mapsto bba$ et $\varphi_2 : a \mapsto abbab, b \mapsto abb$ deux morphismes. Ils sont conjugués, car*

$$\begin{aligned} a \cdot \varphi_1(a) &= a \cdot bbaba = abbab \cdot a = \varphi_2(a) \cdot a, \\ a \cdot \varphi_1(b) &= a \cdot bba = abb \cdot a = \varphi_2(a) \cdot a. \quad \diamond \end{aligned}$$

Un *point fixe* d'un morphisme φ est un mot x tel que $\varphi(x) = x$. Bien sûr ε est point fixe de tout morphisme étant donné que $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$.

Un morphisme φ sur Σ^* est dit *cyclique* s'il existe un mot non vide $w \in \Sigma^*$ tel que pour tout $\alpha \in \Sigma$ il existe un entier $n_\alpha \in \mathbb{N}^+$ tel que $\varphi(\alpha) = w^{n_\alpha}$. Dans ce cas, le point fixe infini $w^\omega = www \dots$ du morphisme φ est périodique.

Lemme 1.9. *Tout point fixe infini de morphisme primitif est uniformément récurrent.*

Démonstration. Si $|\Sigma| = 1$, alors un mot infini sur Σ est trivialement périodique et donc uniformément récurrent. Ainsi, on peut supposer que $|\Sigma| \geq 2$. Soit $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ un morphisme primitif. Selon le Lemme 1.5, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(\alpha)$ contient toutes les lettres de Σ et donc tel que φ^k est croissant. Ainsi, $\lim_{i \rightarrow \infty} |\varphi^i(\alpha)| = \infty$ pour tout lettre $\alpha \in \Sigma$. Soit $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u}) = u_1 u_2 u_3 \dots$, $u_i \in \Sigma$, un point fixe infini de φ . Comme il existe un préfixe fini de \mathbf{u} qui contient tous les facteurs de longueur n de \mathbf{u} , soit

$$\ell_n = \min\{\ell \in \mathbb{N} : f \in L_n(\mathbf{u}) \implies f \in L_n(\varphi^\ell(u_1))\}.$$

Pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\varphi^k(\alpha)$ contient au moins une fois la lettre u_1 et donc $\varphi^{\ell_n+k}(\alpha)$ contient tous les facteurs de longueur n de \mathbf{u} . En considérant

$$\mathbf{u} = \varphi^{\ell_n+k}(\mathbf{u}) = \varphi^{\ell_n+k}(u_1) \cdot \varphi^{\ell_n+k}(u_2) \cdot \varphi^{\ell_n+k}(u_3) \cdot \dots,$$

et en posant $m = \max\{|\varphi^{\ell_n+k}(\alpha)| : \alpha \in \Sigma\}$, on conclut que tout facteur de longueur $2m$ de \mathbf{u} contient au moins un facteur de la forme $\varphi^{\ell_n+k}(\alpha)$ qui lui-même contient tout facteur de longueur n de \mathbf{u} . Ainsi, \mathbf{u} est uniformément récurrent. \square

Il existe des mots uniformément récurrents non périodiques : le mot de Thue-Morse \mathbf{t} et les mots sturmiens en étant des exemples classiques.

1.4 Langages

Dans cette section, nous définissons la terminologie associée aux langages, à la complexité en facteurs et aux graphes de Rauzy. Nous adoptons les notations de Julien Cassaigne et François Nicolas figurant dans le chapitre 4 du livre *Combinatorics, Automata and Number Theory* (Cassaigne et Nicolas, 2010).

Un langage est un sous-ensemble du monoïde libre A^* . Un langage L est *factoriel* si

$$w \in L \text{ et } u \text{ facteur de } w \implies u \in L$$

et *fermé par image miroir* si

$$w \in L \implies \tilde{w} \in L.$$

Soit $\sigma : A^* \rightarrow A^*$, un morphisme. On définit le langage engendré par la substitution σ , noté L_σ , par

$$L_\sigma = \bigcup_{n \geq 0, \alpha \in A} L(\sigma^n(\alpha)).$$

Soit w un facteur de u . Une lettre qui apparaît immédiatement après une occurrence de w est appelée une *extension à droite* de w . L'ensemble des extensions à droite de w dans u est notée $E^+(w)$. La *valence à droite* de w (dans u), notée $d^+(w)$, est le nombre d'extensions à droite distinctes de w :

$$d^+(w) = \text{Card}\{x \in A \mid wx \in L(u)\}.$$

Les *extensions à gauche* $E^-(w)$ et la *valence à gauche* $d^-(w)$ sont analogues. Un facteur dont la valence à droite est au moins 2 est appelé *spécial à droite*. Un facteur dont la valence à gauche est au moins 2 est appelé *spécial à gauche*. Un facteur qui est à la fois spécial à gauche et spécial à droite est appelé *bispécial*. L'ensemble des facteurs spéciaux à droite, spéciaux à gauche et bispéciaux de longueur n sont identifiés respectivement par $RS_n(u)$, $LS_n(u)$ et $BS_n(u)$. Le *type d'extension* d'un facteur w de u est l'ensemble des paires (a, b) de $A \times A$ telles que w peut être allongé dans les deux directions comme awb :

$$E(w) = \{(a, b) \in A^2 \mid awb \in L(u)\}.$$

On remarque que $E(w) \subseteq E^-(w) \times E^+(w)$, mais que l'égalité n'est pas toujours vérifiée.

La *multiplicité bilatérale* d'un facteur w est le nombre

$$m(w) = \text{Card } E(w) - d^-(w) - d^+(w) + 1.$$

On a la proposition suivante qui relie la multiplicité bilatérale à la notion de facteur bispécial.

Proposition 1.10. (Cassaigne et Nicolas, 2010, Proposition 4.5.1) *Soit w un facteur d'un mot infini u et récurrent tel que $m(w) \neq 0$. Alors, w est bispécial.*

Un facteur bispécial est dit *fort* si $m(w) > 0$, *faible* si $m(w) < 0$ et *neutre* si $m(w) = 0$. Un facteur bispécial dont le type d'extension satisfait $E(w) \subseteq \{a\} \times A \cup A \times \{b\}$ pour une paire de lettres $(a, b) \in E(w)$ est dit *ordinaire*. Le fait que $(a, b) \in E(w)$ est subtil mais important et ne doit pas être négligé par le lecteur. Tous les facteurs bispéciaux ordinaires sont neutres, mais la réciproque n'est pas vraie. Il est pratique de représenter le type d'extension $E(w)$ d'un facteur bispécial w dans un tableau. Une croix (\times) est présente à l'intersection de la ligne a et de la colonne b si et seulement si $(a, b) \in E(w)$. Quelques exemples de type d'extension sur un alphabet à trois lettres sont représentés à la Figure 1.1.

Deux autres fonctions dérivées à partir de la fonction de complexité se révèlent utiles, à savoir : la suite des *différence finies d'ordre 1* de $p(n)$,

$$s(n) = p(n+1) - p(n),$$

ainsi que la suite des *différence finies d'ordre 2*,

$$b(n) = s(n+1) - s(n) = p(n+2) - 2p(n+1) + p(n).$$

Proposition 1.11. (Cassaigne et Nicolas, 2010, Proposition 4.5.3) *La fonction de complexité $p(n)$ peut être calculée à partir de la fonction s ou de la valeur de $p(1)$ et de la*

1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2	3
2		×		2		×		2		×		2		×	
3	×	×	×	3	×	×	×	3	×		×	3	×	×	×
$m(w) = 0$				$m(w) = 0$				$m(w) = 0$				$m(w) = 0$			
neutre et ordinaire				neutre et ordinaire				neutre mais pas ordinaire				neutre mais pas ordinaire			

1	1	2	3	1	1	2	3
2		×		2		×	×
3			×	3	×	×	×
$m(w) = -1$				$m(w) = 1$			
faible				fort			

Figure 1.1 Sur l'alphabet $A = \{1, 2, 3\}$, on représente le type d'extension $E(w)$ d'un facteur bispécial w par un tableau. Une croix (\times) est présente à l'intersection de la ligne a et de la colonne b si et seulement si $(a, b) \in E(w)$.

fonction b à l'aide des formules suivantes :

$$p(n) = 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1} s(\ell) = 1 + (p(1) - 1)n + \sum_{k=0}^{n-1} (n - 1 - k)b(k).$$

Cette proposition s'avère très utile pour calculer la fonction de complexité $p(n)$ lors que celle-ci croît lentement (par exemple une croissance linéaire), car dans ce cas les fonctions s et b prennent des valeurs petites. Par exemple, pour les mots sturmiens, on a $p(n) = n + 1$ si et seulement si $s(n)$ est toujours égal à 1 si et seulement si exactement deux lettres apparaissent ($p(1) = 2$) et $b(n)$ prend toujours la valeur 0.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la complexité en facteurs de certains mots récurrents et nous aurons besoin du résultat suivant qui lie les fonctions s et b aux facteurs spéciaux et bispéciaux. Nous avons adapté l'énoncé pour les mot infinis récurrents.

Théorème 1.12. (Cassaigne et Nicolas, 2010, Theorème 4.5.4) *Soit $u \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini récurrent. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$(i) \quad s(n) = \sum_{w \in RS_n(u)} (d^+(w) - 1)$$

$$(ii) \ s(n) = \sum_{w \in LS_n(u)} (d^-(w) - 1)$$

$$(iii) \ b(n) = \sum_{w \in BS_n(u)} m(w)$$

Le théorème suivant, initialement dans (Cassaigne, 1995), donne une condition nécessaire et suffisante pour que la complexité en facteurs soit linéaire.

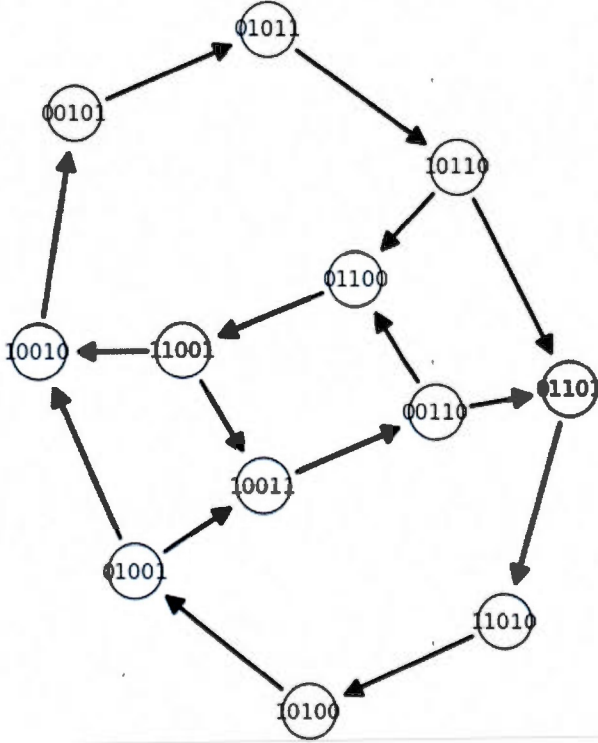
Théorème 1.13. (Cassaigne et Nicolas, 2010, Theorème 4.9.3) *Soit $u \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini. Alors $p(n) = \mathcal{O}(n)$ si et seulement si s est bornée.*

Les extensions de facteurs, les valences, les facteurs spéciaux et bispéciaux peuvent être visualisés en utilisant une représentation sous forme de graphe du langage $L_n(u)$. Le *graphe de Rauzy* (Rauzy, 1983) ou *graphe des facteurs* d'ordre n de u est le graphe orienté G_n défini comme suit : G_n possède $p(n)$ sommets identifiés par les éléments de $L_n(u)$ et il y a une arête de v à w si et seulement s'il existe deux lettres $a, b \in A$ telles que $vb = aw \in L_{n+1}(u)$. Cette arête est étiquetée par la lettre b . Par conséquent, le graphe G_n possède $L_{n+1}(u)$ arêtes. Le degré entrant d'un sommet w est égal à la valence à gauche $d^-(w)$ et le degré sortant, à la valence à droite $d^+(w)$. Un facteur spécial à droite possède au moins deux arêtes sortantes, et un facteur spécial à gauche, au moins deux arêtes entrantes.

Exemple Sage 1.14.

À l'aide du logiciel Sage, nous pouvons calculer et dessiner le graphe de Rauzy des facteurs de longueur 5 d'un certain préfixe du mot de Thue-Morse. Ci-bas nous considérons un préfixe de longueur 100 et nous obtenons le graphe G_5 possédant 12 sommets.

```
sage: w = words.ThueMorseWord()[:100]
sage: w.left_special_factors(5)
[word: 10010, word: 10011, word: 01101, word: 01100]
sage: w.right_special_factors(5)
[word: 01001, word: 10110, word: 00110, word: 11001]
sage: w.bispecial_factors(5)
[]
sage: G5 = w.rauzy_graph(5); G5
Looped digraph on 12 vertices
sage: G5.plot(talk=True)
```



1.5 Géométrie discrète

Dans cette section, nous rappelons les notions de base de la géométrie discrète utilisées dans cette thèse. Soit $d > 1$ un entier et soit $\{e_1, \dots, e_d\}$ la base canonique de l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^d . On appelle *ensemble discret* tout sous-ensemble de l'*espace discret* \mathbb{Z}^d et on considère \mathbb{Z}^d comme un groupe pour l'addition. Un *chemin* de \mathbb{Z}^d du point A au point B est une suite de points $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $p_i \in \mathbb{Z}^d$, $p_1 = A$ et $p_n = B$. Un chemin de \mathbb{Z}^2 est dit *4-connexe* si pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$p_{i+1} - p_i \in \{\pm e_1, \pm e_2\}.$$

Un chemin de \mathbb{Z}^2 est dit *8-connexe* si pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$p_{i+1} - p_i \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}.$$

Un chemin de \mathbb{Z}^3 est dit *6-connexe* si pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$p_{i+1} - p_i \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}.$$

Un chemin de \mathbb{Z}^3 est dit *18-connexe* si pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$p_{i+1} - p_i \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_1 \pm e_2, \pm e_1 \pm e_3, \pm e_2 \pm e_3\}.$$

Un chemin de \mathbb{Z}^3 est dit *26-connexe* si pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$p_{i+1} - p_i \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_1 \pm e_2, \pm e_1 \pm e_3, \pm e_2 \pm e_3, \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3\}.$$

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{Z}^d . On dit que E est *k-connexe* si pour toute paire $A, B \in E$, il existe un chemin *k-connexe* $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $p_1 = A$ et $p_n = B$ et entièrement inclus dans E , c'est-à-dire que $p_i \in E$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Un *polyomino* est un sous-ensemble 4-connexe P de \mathbb{Z}^2 tel que son complément $\mathbb{Z}^2 \setminus P$ est 8-connexe. Un *polyomino k-connexe dont le complément est k'-connexe* est un sous-ensemble *k-connexe* P de \mathbb{Z}^2 tel que le complément $\mathbb{Z}^2 \setminus P$ est *k'-connexe* où $k, k' \in \{4, 8\}$ (voir Figure 1.2).

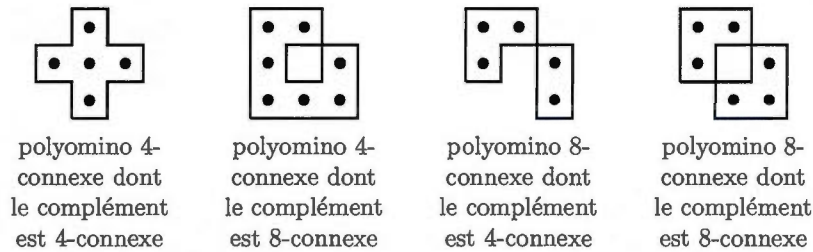


Figure 1.2 Polyominos *k-connexes* dont le complément est *k'-connexe* où $k, k' \in \{4, 8\}$.

Soit $E \subset \mathbb{Z}^d$ un sous-ensemble *k-connexe* de \mathbb{Z}^d . On dit que le point $p \in E$ est *k-simple*, ou *simple* si le contexte est clair, si $E \setminus \{p\}$ reste *k-connexe*. On dit que E est *k-minimal* ou *minimal pour k-connexité* s'il ne possède pas de point *k-simple*.

1.6 Combinatoire des mots et chemins discrets

Dans cette thèse, l'alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$ est identifié à \mathbb{Z}_4 , le groupe additif des entiers modulo 4 et représente respectivement les pas élémentaires de la grille $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\} = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$. Comme nous allons le voir ici, les mots sur \mathcal{F}^* représentent bien les propriétés géométriques des chemins discrets dans \mathbb{Z}^2 .

Un mot w de \mathcal{F}^* décrit un chemin dans \mathbb{Z}^2 unique à translation près, de sorte que l'on parle du mot $w \in \mathcal{F}^*$ comme du *chemin* w indistinctement. À un chemin w correspond un *vecteur déplacement* appartenant à \mathbb{Z}^2 noté \vec{w} et donné par

$$\vec{w} = (|w|_0 - |w|_2, |w|_1 - |w|_3). \quad (1.3)$$

Si $(0, 0)$ est le point de départ du chemin w , alors \vec{w} est le point d'arrivée de w .

Les transformations de base sur \mathbb{Z}_4 , notamment les rotations $\rho^i : x \mapsto x + i$ et les réflexions $\sigma_i : x \mapsto i - x$, agissent comme des fonctions sur l'alphabet \mathcal{F} et s'étendent de manière unique à des morphismes (pour la concaténation) de \mathcal{F}^* . On utilise la barre supérieure $\bar{w} = \sigma_0(w)$ pour noter l'une des réflexions pour tout $w \in \mathcal{F}^*$. Autrement dit, $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = 3$, $\bar{2} = 2$ et $\bar{3} = 1$. Le chemin $\rho(w)$ correspond à une rotation de 90 degrés du chemin w et le chemin $\sigma_i(w)$ correspond à l'image par une réflexion du chemin w . De plus, le mot $\hat{w} = \rho^2(\bar{w})$ est le chemin *homologue* de w , c'est-à-dire le chemin w parcouru en sens inverse (Figure 1.3).

Étant donné un mot non vide $w \in \mathcal{F}^*$, le *mot des différences finies* $\Delta(w) \in \mathcal{F}^*$ de w est le mot vide ε si $|w| = 1$, et sinon

$$\Delta(w) = (w_2 - w_1) \cdot (w_3 - w_2) \cdots (w_n - w_{n-1}). \quad (1.4)$$

Le mot des différences finies d'un chemin w donne la suite des virages du chemin : **1** pour tourner à gauche de 90 degrés, **3** pour tourner à droite de 90 degrés, **0** pour aller tout droit et **2** pour un virage à 180 degrés. Un exemple est illustré à la Figure 1.3.

Étant donné deux mots $w, z \in \mathcal{F}^* \setminus \{\varepsilon\}$, il est souvent pratique de comparer la dernière lettre de w avec la première lettre de z . Ainsi, $\Delta(w, z) \in \mathcal{F}$ dénote la lettre de \mathcal{F} donnée par

$$\Delta(w, z) = \Delta(\text{LST}(w)\text{FST}(z)) = \Delta(w_n z_1). \quad (1.5)$$

On peut vérifier que $\Delta(wz) = \Delta(w)\Delta(w, z)\Delta(z)$. Il est pratique de considérer la classe de conjugaison $[w]$ qu'on identifie à un *mot circulaire*. Le mot des différences finies d'un mot circulaire est donné par la règle

$$\Delta([w]) = \begin{cases} [\Delta(w) \cdot \Delta(w, w)] & \text{si } w \text{ est non vide,} \\ [\varepsilon] & \text{si } w \text{ est vide.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Si au moins une lettre de w est connue à une position donnée, le mot w peut être reconstruit entièrement à partir de $\Delta(w)$ en utilisant la suite des sommes partielles. Ainsi, la *suite des sommes partielles* $\Sigma_\alpha(w) \in \mathcal{F}^*$ d'un mot $w \in \mathcal{F}^*$, dont la première lettre est $\alpha \in \mathcal{F}$, est définie par

$$\Sigma_\alpha(w) = \alpha \cdot (\alpha + w_1) \cdot (\alpha + w_1 + w_2) \cdots (\alpha + w_1 + w_2 + \cdots + w_n). \quad (1.7)$$

On étend cette fonction à la classe de conjugaison d'un mot w en ne considérant pas la dernière lettre de $\Sigma_\alpha(w)$:

$$\Sigma_\alpha([w]) = [\alpha \cdot (\alpha + w_1) \cdot (\alpha + w_1 + w_2) \cdots (\alpha + w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1})]. \quad (1.8)$$

Un mot $u \in \mathcal{F}^*$ peut contenir des facteurs de l'ensemble $\mathcal{C} = \{02, 20, 13, 31\}$, qui correspondent à des pas qui annulent le pas précédent. Néanmoins, chaque mot w peut être réduit en un unique mot w' , en appliquant successivement les règles de réécriture de la forme $u \mapsto \varepsilon$, pour tout $u \in \mathcal{C}$. Le *mot réduit* w' de w est un mot dans l'ensemble

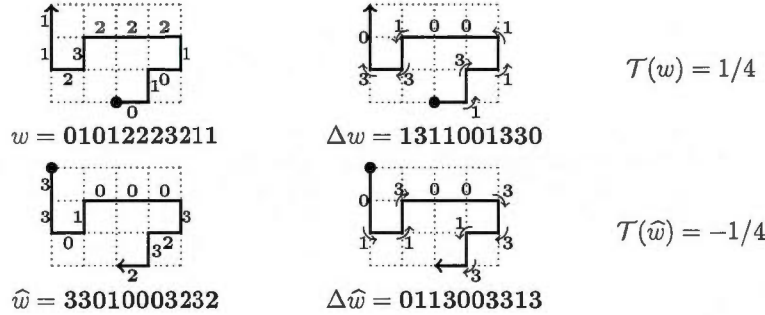


Figure 1.3 Le chemin $w = 01012223211$. Le mot des différences finies $\Delta(w) = 1311001330$. Le chemin homologue $\hat{w} = 33010003232$. On vérifie que $\mathcal{T}(w) = -\mathcal{T}(\hat{w})$.

$\mathcal{P} = \mathcal{F}^* \setminus \mathcal{F}^* \mathcal{C} \mathcal{F}^*$. Le nombre d'enroulement de w est défini par

$$\mathcal{T}(w) = \frac{|\Delta(w')|_1 - |\Delta(w')|_3}{4}. \quad (1.9)$$

Étant donné deux mots non vides w et z , il est pratique comme pour le mot des différences finies de calculer le nombre d'enroulement du mot de longueur 2 qui consiste de la dernière lettre de w et de la première lettre de z . Ainsi, on écrit

$$\mathcal{T}(w, z) = \mathcal{T}(\text{LST}(w)\text{FST}(z)). \quad (1.10)$$

et on vérifie que $\mathcal{T}(wz) = \mathcal{T}(w) + \mathcal{T}(w, z) + \mathcal{T}(z)$. De plus, le nombre d'enroulement satisfait aussi aux équations suivantes

$$\mathcal{T}(w) = -\mathcal{T}(\hat{w}), \quad (1.11)$$

$$\mathcal{T}(w, z) = -\mathcal{T}(\hat{z}, \hat{w}). \quad (1.12)$$

Dans (Brlek, Labelle et Lacasse, 2005b; Brlek, Labelle et Lacasse, 2006), les auteurs ont introduit une notion similaire appelée « *winding number* » de w qui vaut $4\mathcal{T}(w)$. Pour que le nombre d'enroulement d'un chemin soit invariant sous la conjugaison, il doit être défini sur la classe de conjugaison. Ainsi, en utilisant les mêmes règles de réécriture, un mot circulaire $[w]$ est *circulairement réduit* à un unique mot $[w']$. Le

nombre d'enroulement du mot circulaire $[w]$ est

$$\mathcal{P}(w) = \mathcal{T}([w]) = \frac{|\Delta([w'])|_1 - |\Delta([w'])|_3}{4}. \quad (1.13)$$

1.7 Mot de contour

Un chemin w est *fermé* si $\vec{w} = (0, 0)$, c'est-à-dire s'il satisfait $|w|_0 = |w|_2$ et $|w|_1 = |w|_3$. Il est *simple* si aucun facteur propre de w n'est fermé. Le sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 contenu dans un chemin fermé simple est un polyomino 4-connexe dont le complément est 4-connexe.

Le nombre d'enroulement $\mathcal{T}([w])$ d'un chemin fermé w appartient à \mathbb{Z} (voir (Brlek, Labelle et Lacasse, 2005b; Brlek, Labelle et Lacasse, 2006)), et en particulier, la relation de Daurat-Nivat (Daurat et Nivat, 2005) peut être énoncée comme suit.

Proposition 1.15. *Le nombre d'enroulement d'un chemin fermé simple w est*

$$\mathcal{T}([w]) = \pm 1.$$

Cela permet de définir l'orientation d'un chemin fermé simple. On dit que le chemin fermé simple w est *orienté positivement* (anti-horaire) si son nombre d'enroulement est $\mathcal{T}([w]) = 1$.

À un polyomino $P \subset \mathbb{Z}^2$, on associe le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 suivant

$$\bigcup_{(x,y) \in P} [x, x+1[\times [y, y+1[$$

dont l'aire est égale à la cardinalité de l'ensemble P et dont la frontière caractérise uniquement le polyomino. On code cette frontière par un mot sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ appelé *mot de contour* (voir Figure 1.4). Le mot de contour d'un polyomino 4-connexe dont le complément est 4-connexe est un chemin fermé simple. Toutefois, cela est faux pour les polyomino 4-connexes dont le complément est 8-connexe, car le mot de contour

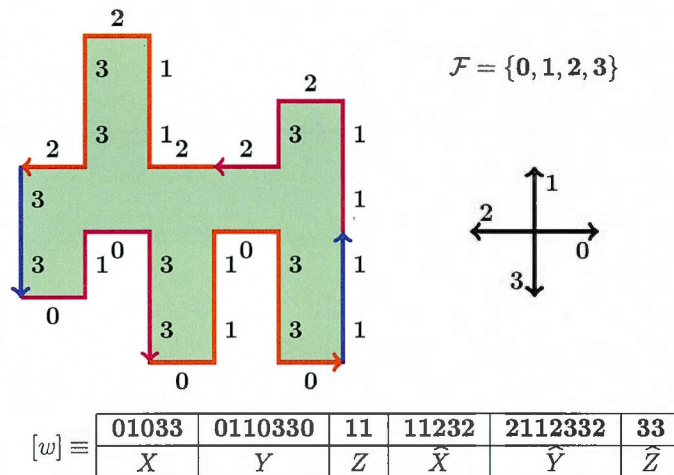


Figure 1.4 Le codage de Freeman d'un polyomino sur l'alphabet \mathcal{F} . Le mot de contour de cette tuile se factorise en 6 parties. C'est la factorisation de Beauquier-Nivat (Beauquier et Nivat, 1991a) considérée au Chapitre 2.

peut passer deux fois par le même point (voir Figure 1.2). La définition de chemin simple est trop restrictive pour l'étude des polyominos que nous voulons faire (voir Figure 2.7). Ainsi nous introduisons le morphisme de \mathcal{F}^* suivant qui est appliqué sur la suite des virages d'un chemin :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} : \mathcal{F}^* &\rightarrow \mathcal{F}^* \\
 0 &\mapsto 000 \\
 1 &\mapsto 131 \\
 2 &\mapsto 020 \\
 3 &\mapsto 313
 \end{aligned}$$

En quelque sorte, le morphisme \mathcal{S} arrondit les coins d'un chemin. On dit qu'un chemin w est *sans croisement* si le chemin

$$\Sigma_\alpha(S(\Delta(w)))$$

est simple. De plus, un chemin circulaire $[w]$ est *sans croisement* si le chemin circulaire $\Sigma_\alpha([S(\Delta([w]))])$ est simple. Par exemple, le chemin fermé $w = 01033011212233$

n'est pas simple, mais il est sans croisement (voir Figure 1.5). En effet, on calcule

$$\begin{aligned}\Delta([w]) &= 13301101310101, \\ S(\Delta([w])) &= 131313313000131131000131313131000131000131, \\ \Sigma_0([S(\Delta([w]))]) &= 01010103033330301011112121212122232333303.\end{aligned}$$

Exemple Sage 1.16.

Ces calculs peuvent être effectués dans Sage à l'aide des fonctions suivantes. Ici, on fait le calcul sur le chemin w et non pas sur le chemin circulaire $[w]$.

```
sage: w = Word([0,1,0,3,3,0,1,1,2,1,2,2,3,3])
sage: w.finite_differences(mod=4)
word: 1330110131010
sage: S = WordMorphism({0:[0,0,0],1:[1,3,1],2:[0,2,0],3:[3,1,3]})
sage: s = S(w.finite_differences(mod=4)); s
word: 131313313000131131000131313131000131000
sage: s.partial_sums(0, mod=4)
word: 010101030333303010111121212121222323333
```

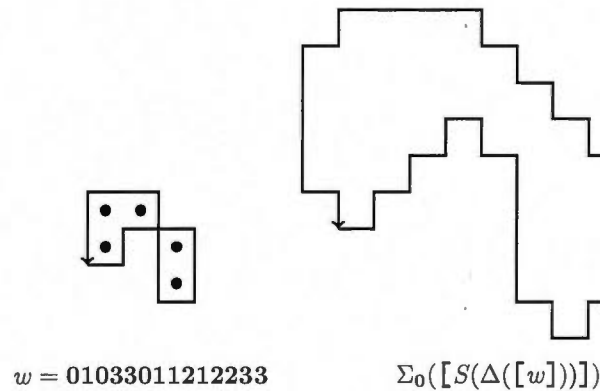


Figure 1.5 Le mot de contour $w = 01033011212233$ délimitant un polyomino 8-connexe n'est pas simple. Toutefois, le chemin $\Sigma_0([S(\Delta([w]))])$ est simple. Alors, on dit que w est sans croisement.

CHAPITRE II

STRUCTURE DES PAVAGES PAR UN POLYOMINO

Ce chapitre contient quatre articles à propos des tuiles doubles carrées. Dans le premier (commun avec Alexandre Blondin Massé et Srečko Brlek), nous démontrons que tout polyomino qui pave le plan engendre au plus deux pavages réguliers de type carré, une propriété conjecturée par Brlek, Dulucq, Fédou et Provençal en 2007. Pour ce faire, nous démontrons que le mot de contour d'une tuile possède au plus deux factorisations de Beauquier-Nivat distinctes où l'une des variables est vide. On dit qu'une tuile est *double carrée* si elle en possède exactement deux.

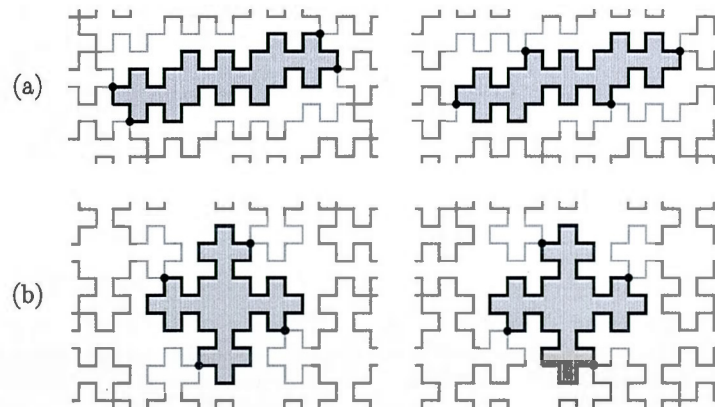


Figure 2.1 (a) Une tuile de Christoffel engendre deux pavages non symétriques du plan. (b) La tuile de Fibonacci d'ordre deux et ses deux pavages du plan. On remarque que ces tuiles doubles carrées sont invariantes par rotation de 180 degrés.

Dans le deuxième (commun avec Alexandre Blondin Massé, Srečko Brek et Ariane Ga-

ron), nous définissons deux familles de doubles carrés : les tuiles de Christoffel et les tuiles de Fibonacci (voir Figure 2.1). Ces deux familles décrivent tous les polyominoes doubles carrés dont le périmètre est inférieur ou égal à 32 indiqués dans la thèse de Xavier Provençal (Provençal, 2008). Par contre, ces deux familles ne représentent pas toutes les tuiles doubles carrées (voir Figure 2.2).

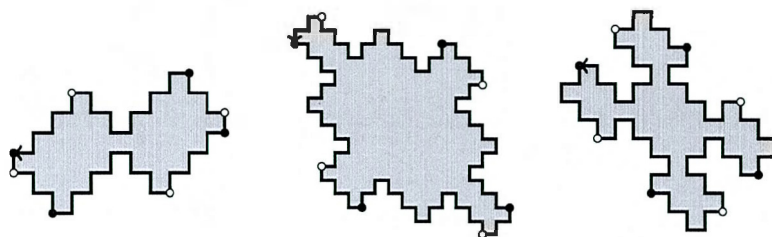


Figure 2.2 Trois tuiles doubles carrées qui ne sont ni de Christoffel ni de Fibonacci. Les deux factorisations carrées sont représentées par les points blancs et noirs.

Dans le troisième article (commun avec Alexandre Blondin-Massé, Srećko Brlek et Michel Mendès France), on s'intéresse plus particulièrement aux propriétés combinatoires des tuiles de Fibonacci et à la fractale qu'elles définissent. On démontre que le chemin de Fibonacci est fermé, auto-évitant et que la suite des périmètres est liée à celle de Fibonacci. De plus, on montre que la suite des aires correspond à la sous-suite d'indice impair des nombres de Pell

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, \dots$$

définie récursivement par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ pour $n > 1$. Les tuiles de Christoffel et de Fibonacci sont d'autant plus intéressantes qu'elles vérifient la conjecture de Provençal et Vuillon stipulant que les doubles carrés indécomposables se factorisent en produit de palindromes (Provençal, 2008). Cette conjecture est résolue dans le quatrième article présenté à la section 2.5.

Cet article est suivi par la présentation d'un chemin dont les propriétés sont similaires au chemin de Fibonacci et qui permet aussi de définir le contour d'une tuile, appelée tuile

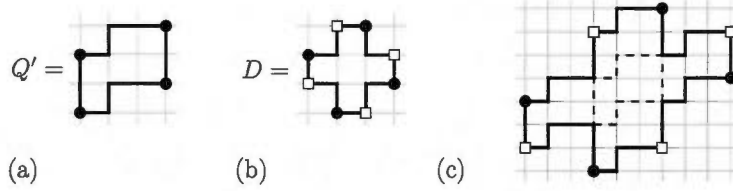


Figure 2.4 (a) Une tuile carrée Q' dont le mot de contour est $AB\hat{A}\hat{B} = 0100 \cdot 11 \cdot 2232 \cdot 33$. À cette tuile carrée, on associe le morphisme $\varphi_{A,B}$ tel que $0 \mapsto A$, $1 \mapsto B$, $2 \mapsto \hat{A}$, $3 \mapsto \hat{B}$. (b) Le pentomino X est une tuile double carrée X et son mot de contour est $v = 010121232303$. (c) La tuile décomposable dont le mot de contour est $\varphi_{A,B}(v)$ n'est pas invariante par rotation ρ^2 de 180 degrés.

implique que $AB\hat{A}\hat{B}$ ou u est le mot de contour du carré unité. Autrement, P est dit *décomposable* (voir la Figure 2.3). Intuitivement, un polyomino est décomposable s'il peut être pavé régulièrement par un polyomino non trivial plus petit.

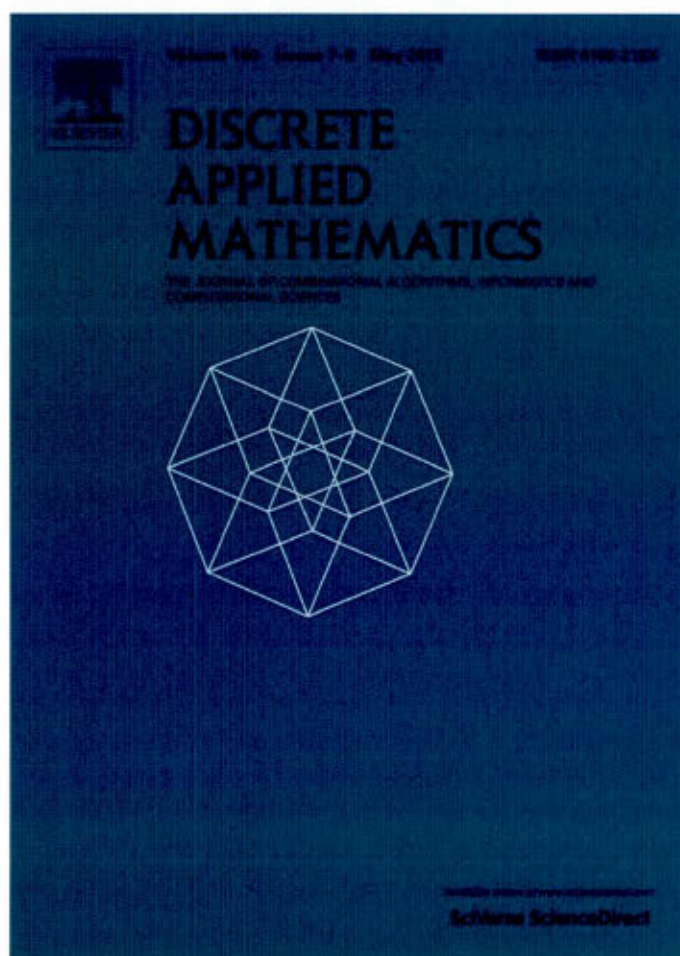
La conjecture de Provençal et Vuillon énoncée dans (Provençal, 2008) soutient que les tuiles doubles carrées indécomposables sont invariantes par rotation de 180 degrés ou en d'autres mots que leur mot de contour se factorise en un produit de palindromes (voir Figure 2.1 et 2.2). Cette propriété n'est pas vérifiée pour les tuiles décomposables : voir la Figure 2.4 qui considère le morphisme

$$\varphi_{A,B} : 0 \mapsto 0100, 1 \mapsto 11, 2 \mapsto 2232, 3 \mapsto 33.$$

Nous proposons une méthode inspirée de (Blondin Massé et al., 2009b; Blondin Massé et al., 2011a) qui permet d'engendrer toutes les tuiles doubles carrées. Nous démontrons que les opérateurs que nous définissons sont inversibles et qu'ils préservent les palindromes ce qui démontre le Théorème 0.2.

2.1 *A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways*

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and educational use, including for instruction at the author's institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Discrete Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/dam

A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways[☆]

A. Blondin Massé^{a,b}, S. Brlek^a, S. Labbé^{a,c,*}^a Laboratoire LaCIM, Un. du Québec à Montréal, C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8^b Laboratoire de mathématiques, Un. de Savoie, Bâtiment Chablais, Campus Scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France^c Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications CNRS UMR 7089, Un. Paris Diderot - Paris 7, Case 7014 75205 Paris Cedex 13, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 19 May 2011

Received in revised form 14 December 2011

Accepted 24 December 2011

Available online 16 January 2012

Keywords:

Tilings

Polyominoes

ABSTRACT

We consider the tilings by translation of a single polyomino or tile on the square grid \mathbb{Z}^2 . It is well-known that there are two regular tilings of the plane, namely, parallelogram and hexagonal tilings. Although there exist tiles admitting an arbitrary number of distinct hexagon tilings, it has been conjectured that no polyomino admits more than two distinct parallelogram tilings. In this paper, we prove this conjecture.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Tilings appeared as one of the archetypes of the close relationship between art and mathematics, and are present in human history under various representations. The beautiful book of Grünbaum and Shephard [13] contains a systematic study of tilings, presenting a number of challenging problems (see also [7] for related work). For instance, the problem of designing an efficient algorithm for deciding whether a given polygon tiles the plane becomes more tractable when restricted to polyominoes, that is, subsets of the square lattice \mathbb{Z}^2 whose boundary is a non-crossing closed path. Indeed, while a sufficient condition is provided by the *Conway criterion* in [17], the boundary of such tiles must be composed of matching pairs of opposite sides which interlock when translated and there might be either two or three such pairs (see [17] p. 225 for more details). Beauquier and Nivat [1] established that this condition was also necessary for tiling by translation in two directions, so that such objects are generalizations of parallelograms and parallel hexagons, hexagons whose opposite sides are parallel. In other words, these tiles are continuous deformations of either the *unit square* or the *regular hexagon*. Here,



Fig. 1. The three hexagonal tilings of the 4×1 rectangle.

[☆] With support of NSERC (Canada).

* Corresponding author at: Laboratoire LaCIM, Un. du Québec à Montréal, C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8. Fax: +1 514 987 8274.

E-mail addresses: blondin_masse.alexandre@uqam.ca (A. Blondin Massé), brlek.srecko@uqam.ca (S. Brlek), labbe.sebastien@uqam.ca (S. Labbé).

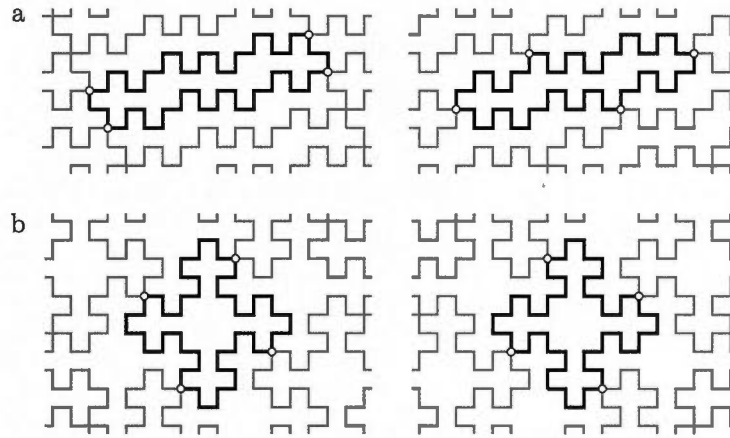


Fig. 2. (a) A Christoffel tile yields two distinct non-symmetric square tilings of the plane. (b) The Fibonacci tile of order 2 and its two symmetric square tilings.

we consider tilings obtained by translation of a single polyomino, called *exact* in [1]. Paths are conveniently described by words on the alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$, representing the elementary grid steps $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}$. Beauquier and Nivat [1] characterized exact polyominoes by showing that the boundary word $b(P)$ of such a polyomino satisfies the equation $b(P) = X \cdot Y \cdot Z \cdot \widehat{X} \cdot \widehat{Y} \cdot \widehat{Z}$, where at most one of the variables is empty and where \widehat{W} is the path W traveled in the opposite direction. From now on, this condition is referred as the *BN-factorization*. An exact polyomino is said to be a *hexagon* if none of the variables X, Y, Z is empty and a *square* if one of them is so. While decidability was already established in [18], recently, it was shown that a linear algorithm exists for deciding whether a word $w \in \mathcal{F}$ represents a square or not. It is based on data structures that include radix-trees, for checking that w is a closed non crossing path [8], and suffix-trees for extracting the BN-factorization [11].

Observe that a single polyomino may lead to many regular tilings (spanned by two translation vectors) of the plane. For instance the $n \times 1$ rectangle does it in $n - 1$ distinct ways as a hexagon (see Fig. 1). On the other hand, square factorizations are more constrained and it was conjectured by Brlek et al. (reported in [15]) that an exact polyomino tiles the plane as a square in at most two distinct ways. Squares having exactly two distinct BN-factorizations are called *double squares*. For instance, Christoffel and Fibonacci tiles introduced recently [3] are examples of double squares (Fig. 2). See [5] for connections between Fibonacci tiles and number theory. Our main result is the proof of the double square conjecture [15].

Theorem 1. Every polyomino yields at most two distinct square tilings.

Note that there are words having more than two square BN-factorizations. An example of length 36 (in fact a shortest one, up to conjugacy) was provided by Provençal [16]:

3	3	011	03301	10330	110	3	3	211	23321	12332	112	3	3
U			V			\widehat{U}			\widehat{V}				
X				Y		\widehat{X}			\widehat{Y}				
W					Z		\widehat{W}			\widehat{Z}			

However, this word does not code the boundary of a polyomino as it is intersecting (see Fig. 3). Hence, solving only equations on words is not sufficient for our purpose. Our approach uses geometrical and topological properties of the boundary word that are deduced from the equations.

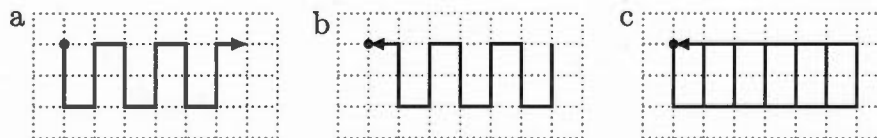


Fig. 3. The paths (a) UV and (b) $UV̂$. The path (c) $UV̂V̂$ has 3 distinct square factorizations but it intersects itself.

2. Preliminaries

The usual terminology and notation on words is from Lothaire [14]. An *alphabet* \mathcal{A} is a finite set whose elements are *letters*. A finite word w is a function $w : [1, 2, \dots, n] \rightarrow \mathcal{A}$, where w_i is the i -th letter, $1 \leq i \leq n$. For later use, we define

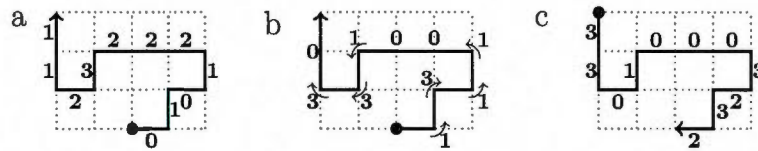


Fig. 4. (a) The path $w = 01012223211$. (b) Its first differences word $\Delta(w) = 1311001330$. (c) Its homologous $\hat{w} = 33010003232$.

the auxiliary functions $\text{First}(w) = w_1$ and $\text{Last}(w) = w_n$. The length of w , denoted by $|w|$, is the integer n . The length of the empty word ε is 0. The free monoid \mathcal{A}^* is the set of all finite words over \mathcal{A} . The reversal of $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ is the word $\tilde{w} = w_n w_{n-1} \cdots w_1$. A word u is a factor of another word w if there exist $x, y \in \mathcal{A}^*$ such that $w = xuy$. When $x, y \neq \varepsilon$, u is called proper factor of w . We denote by $|w|_u$ the number of occurrences of u in w . Two words u and v are conjugate, written $u \equiv v$ or sometimes $u \equiv_{|\mathcal{A}|} v$, when x, y are such that $u = xy$ and $v = yx$. Conjugacy is an equivalence relation and the class of a word w is denoted $[w]$. In this paper, the alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$ is identified with \mathbb{Z}_4 , the additive group of integers mod 4. This allows to use the basic transformations on \mathbb{Z}_4 , namely, rotations $\rho^i : x \mapsto x + i$ and reflections $\sigma_i : x \mapsto i - x$, as maps on \mathcal{F} which extend uniquely to morphisms (w.r.t concatenation) on \mathcal{F}^* . Given a nonempty word $w \in \mathcal{F}^*$, the first differences word $\Delta(w) \in \mathcal{F}^*$ of w is ε if $|w| = 1$, and otherwise

$$\Delta(w) = (w_2 - w_1) \cdot (w_3 - w_2) \cdots (w_n - w_{n-1}). \quad (1)$$

One may verify that if $w, z \in \mathcal{F}^* \setminus \{\varepsilon\}$, then $\Delta(wz) = \Delta(w)\Delta(w_n z_1)\Delta(z)$. Words in \mathcal{F}^* are interpreted as paths in the square grid, so that we indistinctly talk of any word $w \in \mathcal{F}^*$ as the path w . Moreover, the word $\hat{w} := \rho^2(\tilde{w})$ is homologous to w , i.e., in direction opposite to that of w (Fig. 4). A word $u \in \mathcal{F}^*$ may contain factors in $\mathcal{C} = \{02, 20, 13, 31\}$, corresponding to canceling steps on a path. Nevertheless, each word w can be reduced in a unique way to a word w' , by sequentially applying the rewriting rules of the form $u \mapsto \varepsilon$, for $u \in \mathcal{C}$. The reduced word w' of w is nothing but a word in $\mathcal{P} = \mathcal{F}^* \setminus \mathcal{F}^* \mathcal{C} \mathcal{F}^*$. We define the turning number¹ of w by $\mathcal{T}(w) = (|\Delta(w')|_1 - |\Delta(w')|_3)/4$.

A path w is closed if it satisfies $|w|_0 = |w|_2$ and $|w|_1 = |w|_3$, and it is simple if no proper factor of w is closed. A boundary word is a simple and closed path, and a polyomino is a subset of \mathbb{Z}^2 contained in some boundary word. It is convenient to represent each closed path w by its conjugacy class $[w]$, also called circular word. An adjustment is necessary to the function \mathcal{T} , for we take into account the closing turn. The first differences also noted Δ is defined on any closed path w by setting

$$\Delta([w]) \equiv \Delta(w) \cdot (w_1 - w_n),$$

which is also a closed word. By applying the same rewriting rules, a circular word $[w]$ is circularly-reduced to a unique word $[w']$. If w is a closed path, then the turning number¹ of w is

$$\mathcal{T}(w) = \mathcal{T}([w]) = (|\Delta([w'])|_1 - |\Delta([w'])|_3)/4.$$

It corresponds to its total curvature divided by 2π . Clearly, the turning number $\mathcal{T}([w])$ of a closed path w belongs to \mathbb{Z} (see [9,10]), and in particular, the Daurat–Nivat relation [12] may be rephrased as follows.

Proposition 2. The turning number of a boundary word w is $\mathcal{T}(w) = \pm 1$.

Now, we may define orientation: a boundary word w is positively oriented (counterclockwise) if its turning number is $\mathcal{T}(w) = 1$. As a consequence, every square satisfies the following factorization.

Lemma 3. Let $w \equiv \widehat{XY\widehat{X}Y}$ be the boundary word of a square; then

$$\Delta([w]) \equiv \Delta(X) \cdot \alpha \cdot \Delta(Y) \cdot \alpha \cdot \Delta(\widehat{X}) \cdot \alpha \cdot \Delta(\widehat{Y}) \cdot \alpha,$$

where $\alpha = 1$ if w is positively oriented, and $\alpha = 3$ otherwise.

Proof. The equation $\mathcal{T}(w) = -\mathcal{T}(\widehat{w})$ holds for all $w \in \mathcal{F}^*$ and the turning number of a positively oriented boundary word is 1. \square

The next property is easy to check.

Lemma 4. Let $w \equiv \widehat{XY\widehat{X}Y}$ be a boundary word of a square. Then $\text{First}(X) = \text{Last}(X)$ and $\text{First}(Y) = \text{Last}(Y)$.

Proof. By Lemma 3, we have $\text{First}(X) - \text{Last}(\widehat{Y}) = \text{First}(Y) - \text{Last}(X) = \text{First}(\widehat{X}) - \text{Last}(Y) \in \{1, 3\}$. Since $\text{Last}(\widehat{Y}) = \rho^2(\text{First}(Y))$ and $\text{First}(\widehat{X}) = \rho^2(\text{Last}(X))$, we deduce that

$$\begin{aligned} \text{First}(X) - \rho^2(\text{First}(Y)) &= \text{First}(Y) - \text{Last}(X) \\ &= \rho^2(\text{Last}(X)) - \text{Last}(Y) \in \{1, 3\}. \end{aligned}$$

By summing up those last equalities, since $\alpha - \rho^2(\alpha) = 2$ for all letters $\alpha \in \mathcal{F}$ and since $1 + 1 = 3 + 3 = 2$, we obtain $\text{First}(X) - \text{Last}(X) + 2 = 2$ and $\text{First}(Y) - \text{Last}(Y) + 2 = 2$, and the result follows. \square

¹ In [9,10], the authors introduced the notion of winding number of w which is $4\mathcal{T}(w)$.

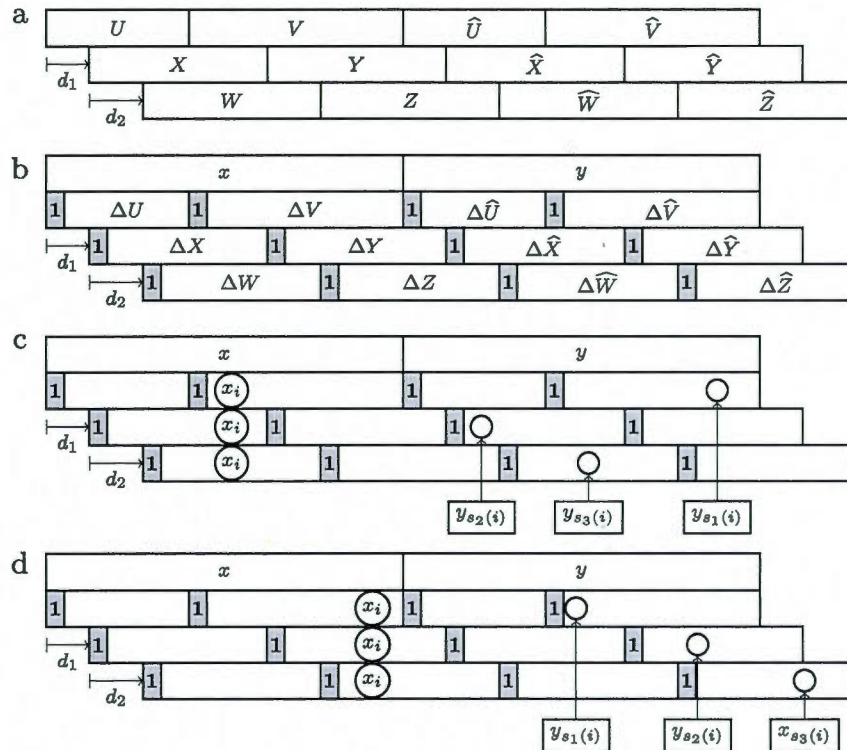


Fig. 5. (a) Three distinct square factorizations of a tile. Note that $0 < d_1 < d_1 + d_2 < |U| < d_1 + |X| < d_1 + d_2 + |W|$, they alternate. (b) The corresponding first differences. (c) The images of the position i in x by the reflections s_1, s_2 and s_3 . The letters at these positions are related by the relations $x_i = y_{s_1}(i) = y_{s_2}(i) = y_{s_3}(i)$. (d) The images of the position i in x by the reflections s_2 or s_3 (but not s_1) can also be to the right of y thus inside x . In this case, we have the relation $x_i = y_{s_1}(i) = y_{s_2}(i) = x_{s_3}(i)$.

We end this section with a useful result adapted from [11,15]. Indeed, the core of the proof of our main result is based on the fact that if a polyomino has two distinct square factorizations, then they alternate, i.e., no factor of one factorization is included in a factor of the other one (see Corollary 6 in [11]).

Lemma 5 ([11,15]). *Let w be the boundary word of an exact polyomino P . If w satisfies*

$$w \equiv UV\widehat{U}\widehat{V} = \alpha XY\widehat{X}\widehat{Y}\beta$$

with $\widehat{Y} = \beta\alpha$ and $\beta \neq \varepsilon$, then either

- (i) $\alpha = \varepsilon$ and $U = X, V = Y$ and the factorizations coincide, or
- (ii) $UV\widehat{U}\widehat{V} \equiv_{d_1} XY\widehat{X}\widehat{Y}$, with $0 < d_1 < |U| < d_1 + |X|$.

3. Proof of Theorem 1

In this section, we assume that there exists a polyomino that tiles the plane as a square in three ways, i.e., its positively oriented boundary word has three distinct square factorizations given by

$$UV\widehat{U}\widehat{V} \equiv_{d_1} XY\widehat{X}\widehat{Y} \equiv_{d_2} WZ\widehat{W}\widehat{Z}. \quad (2)$$

By Lemma 5, the factorizations must alternate which translates into the inequalities

$$0 < d_1 < d_1 + d_2 < |U| < d_1 + |X| < d_1 + d_2 + |W|,$$

and we have the situation depicted in Fig. 5-(a).

Let $I = \{0, d_1, d_1 + d_2, |U|, d_1 + |X|, d_1 + d_2 + |W|\}$ be the set of six corners of the boundary. It follows from Lemma 5 that all these corners are distinct, that is $|I| = 6$. Furthermore, it is convenient to consider the first differences word of the boundary word as two parts

$$\begin{aligned} x &= x_0 x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 1 \cdot \Delta U \cdot 1 \cdot \Delta V, \\ y &= y_0 y_1 y_2 \dots y_{n-1} = 1 \cdot \Delta \widehat{U} \cdot 1 \cdot \Delta \widehat{V}, \end{aligned}$$

where $n = |x| = |y|$ is the half-perimeter. Note that $x_i = y_i = 1$ for all six corners $i \in I$ (see Fig. 5-(b)). Three reflections on \mathbb{Z}_n are useful:

$$\begin{aligned} s_1 : i &\mapsto (|U| - i) \bmod n, \\ s_2 : i &\mapsto (|X| + 2d_1 - i) \bmod n, \\ s_3 : i &\mapsto (|W| + 2(d_1 + d_2) - i) \bmod n. \end{aligned}$$

They satisfy $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1$ and $(s_j s_k s_\ell)^2 = 1$ for all $j, k, \ell \in \{1, 2, 3\}$ which is equivalent to the following identity:

$$s_k s_\ell s_j s_k s_\ell = s_j. \quad (3)$$

If $(s_j s_k)^2 = 1$ with $s_j \neq s_k$ then s_j and s_k are *perpendicular*. From Lemma 5, the reflections s_1, s_2 and s_3 are pairwise distinct. We say that s_1 is *admissible* on i if $i \notin \{0, |U|\}$ and similarly for s_2 if $i \notin \{d_1, |X| + d_1\}$ and for s_3 if $i \notin \{d_1 + d_2, |W| + d_1 + d_2\}$. Below we denote $\bar{\alpha} := \sigma_0(\alpha)$ so that $\bar{0} = 0, \bar{1} = 3, \bar{2} = 2$ and $\bar{3} = 1$. The fact that $(\Delta w)_i = (\Delta \bar{w})_{|w|-i}$ for all $w \in \{U, V, X, Y, W, Z\}$ and $1 \leq i \leq |w| - 1$ then translates nicely in terms of x, y and reflections s_1, s_2 and s_3 (see Fig. 5-(c)-(d)).

Lemma 6. Let $i \in \mathbb{Z}_n$ and $j \in \{1, 2, 3\}$ such that s_j is admissible on i . Then

- (i) $y_i = \overline{x_{s_j(i)}}$ and $x_i = \overline{y_{s_j(i)}}$ or $x_i = \overline{x_{s_j(i)}}$ and $y_i = \overline{y_{s_j(i)}}$.
- (ii) If $x_i = y_i$, then $x_{s_j(i)} = y_{s_j(i)}$.

Proof. (i) There are three cases to consider according to the value of j . First, suppose $j = 1$ and assume that $0 < i < |U|$. We have

$$\begin{aligned} x_i &= (\Delta U)_i = \overline{(\Delta \widehat{U})_{|U|-i}} = \overline{y_{s_1(i)}}, \\ y_i &= (\Delta \widehat{U})_i = \overline{(\Delta U)_{|U|-i}} = \overline{x_{s_1(i)}}. \end{aligned}$$

On the other hand, if $|U| < i < n$, then $s_1(i) = |U| - i + n$ and

$$\begin{aligned} x_i &= (\Delta V)_{i-|U|} = \overline{(\Delta \widehat{V})_{n-i}} = \overline{y_{s_1(i)}}, \\ y_i &= (\Delta \widehat{V})_{i-|U|} = \overline{(\Delta V)_{n-i}} = \overline{x_{s_1(i)}}. \end{aligned}$$

Now, suppose $j = 2$ and assume that $0 < i < d_1$. We have

$$\begin{aligned} x_i &= (\Delta \widehat{Y})_{|Y|+i-d_1} = \overline{(\Delta Y)_{d_1-i}} = \overline{x_{2d_1+|X|-i}} = \overline{x_{s_2(i)}}, \\ y_i &= (\Delta Y)_{|Y|+i-d_1} = \overline{(\Delta \widehat{Y})_{d_1-i}} = \overline{y_{2d_1+|X|-i}} = \overline{y_{s_2(i)}}. \end{aligned}$$

The other cases for $j = 2$ and $j = 3$ are similar.

- (ii) If $x_i = y_i$, then (i) implies $x_{s_j(i)} = y_{s_j(i)}$. \square

Note that if s_j is not admissible on i and $k \neq j$, then s_k must be admissible on i , because I contains 6 distinct corners. We say that a sequence of reflections $(s_{j_m}, \dots, s_{j_2}, s_{j_1})$ is *admissible* on i if each s_{j_k} is admissible on $s_{j_{k-1}} \dots s_{j_2} s_{j_1}(i)$. By abuse of notation, we equivalently write that the expression $s_{j_m} \dots s_{j_2} s_{j_1}$ is *admissible* on i .

Lemma 7. Let $i \in I$ and $S = s_{j_m} s_{j_{m-1}} \dots s_{j_2} s_{j_1}$ be an admissible product of reflections on i . Then $x_{S(i)} = y_{S(i)}$ and

$$x_{S(i)} = \begin{cases} x_i & \text{if } m \text{ is even,} \\ \bar{x}_i & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases}$$

Proof. By induction on m and from Lemma 6. \square

Lemma 8. The following statements hold.

- (i) $s_2 s_3(0) = |U| = s_3 s_2(0)$.
- (ii) $s_1 s_3(d_1) = d_1 + |X| = s_3 s_1(d_1)$.

Proof. The proof proceeds by examining several cases. In each case, we reach a contradiction by showing that either two distinct reflections are not admissible on the same position, or that the letter **3** occurs on a corner, or that two reflections are equal.

- (i) We show the first equality by using the identity $s_1 = s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$. If $s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$ is admissible on 0, then

$$3 = \bar{1} = \bar{x}_0 = x_{s_2 s_3 s_1 s_2 s_3(0)} = x_{s_1(0)} = x_{|U|} = 1$$

which is a contradiction (Figs. 6-(a) and 7). Thus $s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$ is not admissible on 0. Having s_3 not admissible on 0 is impossible since s_3 is admissible on everything but $d_1 + d_2$ and $|W| + d_1 + d_2$ (Fig. 6-(b)). Having s_2 not admissible on $s_3(0)$ is also impossible since this implies that $s_3(0) \in I$ and

$$3 = \bar{1} = \bar{x}_0 = x_{s_3(0)} = 1.$$

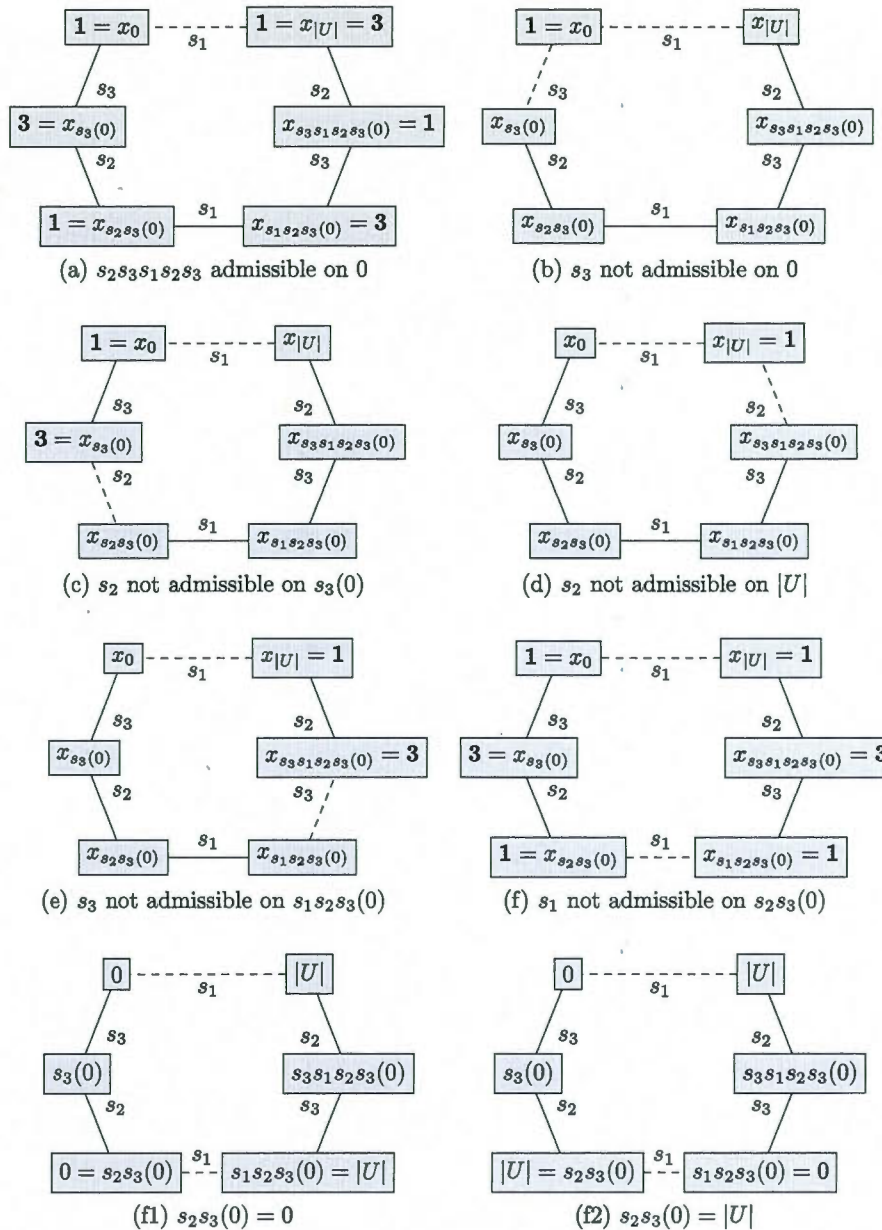


Fig. 6. Cases yielding a contradiction in the proof of Lemma 8. Applying a reflection on a vertex is represented by a plain edge if it is admissible and by a dashed one otherwise.

(Fig. 6-(c)). Similar arguments show that supposing s_2 not admissible on $s_3 s_1 s_2 s_3(0)$ or s_3 not admissible on $s_1 s_2 s_3(0)$ yields a contradiction (Fig. 6-(d)–(e)). Hence, the only remaining possibility is that s_1 is not admissible on $s_2 s_3(0)$ (Fig. 6-(f)). Again there are two cases: either $s_2 s_3(0) = 0$ or $s_2 s_3(0) = |U|$. In the first case, since $s_2 s_3$ fixes 0, it means that $s_2 s_3 = 1$ and then $s_2 = s_3$ which is a contradiction (Fig. 6-(f1)). Otherwise, $s_2 s_3(0) = |U|$ (Fig. 6-(f2)).

A similar argument, based on the identity $s_1 = s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$ instead of $s_1 = s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$, might be used to prove the equality $s_3 s_2(0) = |U|$, concluding part (i). Part (ii) is proved in the same way by considering the identities $s_2 = s_1 s_3 s_2 s_1 s_3$ and $s_2 = s_3 s_1 s_2 s_3 s_1$. \square

We are now ready to prove the main result.

Proof of Theorem 1. From Lemma 8(i), we have $s_2 s_3(0) = |U| = s_3 s_2(0)$. Then, $s_3 s_2 = s_2 s_3$ so that s_2 and s_3 must be perpendicular since they are not equal. From Lemma 8(ii), we have $s_1 s_3(d_1) = d_1 + |X| = s_3 s_1(d_1)$. Then, $s_1 s_3 = s_3 s_1$ so that s_1 and s_3 must be perpendicular since they are not equal. Hence, both s_1 and s_2 are perpendicular to s_3 so that $s_1 = s_2$ which is a contradiction. We conclude that there are no polyomino having three distinct square factorizations of its boundary. \square

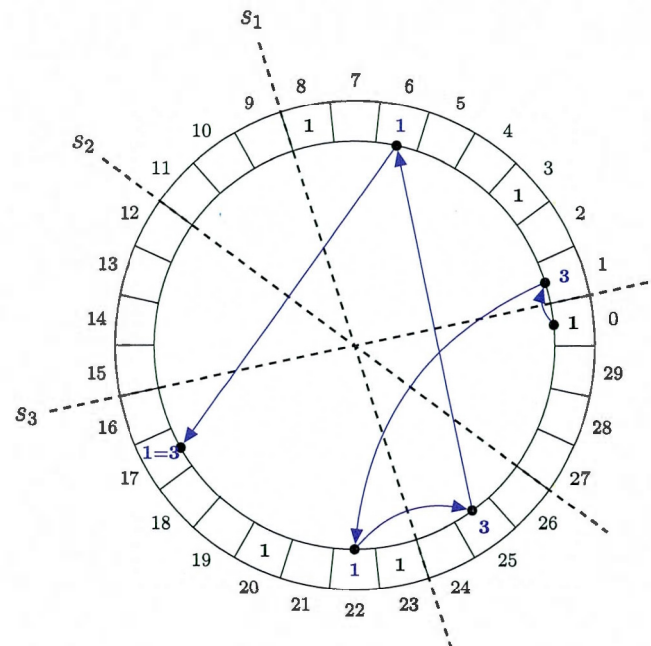


Fig. 7. Reflections in action on x where $n = 30$, $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $|U| = 17$, $|X| = 17$ and $|W| = 15$. If $s_2 s_3 s_1 s_2 s_3$ is admissible on 0, then $1 = x_0 = \overline{x_{s_2 s_3 s_1 s_2 s_3}(0)} = \overline{x_{17}} = \overline{1} = 3$, a contradiction: in fact, any odd-length path between two 1's yields a contradiction.

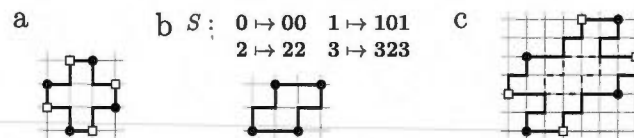


Fig. 8. (a) A prime double square D . (b) A square tile S . (c) The tile $S(D)$, which is obtained by replacing each unit square of D by S , is a double square tile. It is not prime.

Notice that in the proof of the main theorem, the contradictions are obtained on the equality of two distinct reflections s_i or on the equality of two distinct corners. This shows that the alternation of square factorizations as stated in Lemma 5 is sufficient but too strong and that a lighter version of it could be used: the proof of Proposition 4 in [11] can be adapted straightforwardly for that purpose.

4. Conclusion

In this paper, we consider tilings by translation of a single polyomino or tile on the square grid \mathbb{Z}^2 and we prove that no polyomino admits more than two regular square tilings which was conjectured in 2008. Our approach uses geometrical and topological properties of the boundary word of tiles that are deduced from equations on words. This leads to another conjecture by Provençal [15] (proved in [6]) stating that if $ABAB$ and $XYXY$ are the BN-factorizations of a prime double square D , then A , B , X and Y are palindromes or equivalently D is invariant under a rotation ρ^2 of 180° (see Fig. 2). Note that a polyomino is prime if it is not obtained by composition of smaller square tiles (see Fig. 8). Moreover, it would be interesting to extend the results of this paper to piecewise C^2 continuous curves in the way Beauquier and Nivat did for their characterization [2]. The problem of generating efficiently double square tiles is also a problem deserving attention and is addressed in [6]. As a last remark, the method developed in this paper can be adapted to prove that no double square tile admits a hexagonal tiling.

Acknowledgments

The authors are grateful to the anonymous referees for suggesting useful improvements for the presentation of this paper. Moreover, this is the journal version of a communication presented at the 7th International Conference on Lattice Paths combinatorics and applications [4] which took place in Siena (Italy).

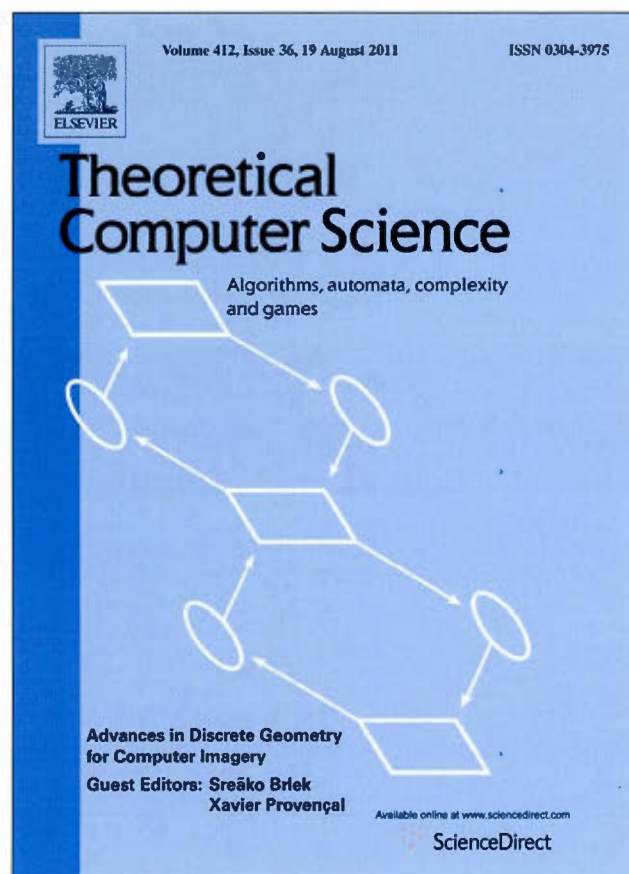
References

- [1] D. Beauquier, M. Nivat, On translating one polyomino to tile the plane, *Discrete & Computational Geometry* 6 (1991) 575–592.

- [2] D. Beauquier, M. Nivat, Tiling the plane with one tile, in: Proceedings of the Sixth Annual Symposium on Computational Geometry, SCG'90, ACM, Berkeley, California, United States, 1990, pp. 128–138.
- [3] A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon, S. Labbé, Christoffel and Fibonacci tiles, in: S. Brlek, X. Provençal, C. Reutenauer (Eds.), Proc. DGC1 2009, 15th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, in: LNCS, vol. 5810, Springer-Verlag, Montréal, Canada, 2009, pp. 67–78.
- [4] A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon, S. Labbé, Every polyomino yields at most two square tilings, in: Lattice Paths 2011, 7th Int. Conf. on Lattice Paths Combinatorics and Applications, July 4–7, Siena, Italy, 2011, pp. 57–61.
- [5] A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé, M. Mendès France, Fibonacci snowflakes, *Annales des Sciences Mathématiques du Québec* 35 (2011) 141–152.
- [6] A. Blondin Massé, A. Garon, S. Labbé, Generation of double square tiles, *Theoretical Computer Science* (2012) (in press).
- [7] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [8] S. Brlek, M. Koskas, X. Provençal, A linear time and space algorithm for detecting path intersection in \mathbb{Z}^d , *Theoretical Computer Science* 412 (2011) 4841–4850.
- [9] S. Brlek, G. Labelle, A. Lacasse, A note on a result of Daurat and Nivat, in: C. de Felice, A. Restivo (Eds.), Proc. DLT 2005, 9th Int. Conf. on Developments in Language Theory, in: LNCS, vol. 3572, Springer-Verlag, Palermo, Italia, 2005, pp. 189–198.
- [10] S. Brlek, G. Labelle, A. Lacasse, Properties of the contour path of discrete sets, *International Journal of Foundations of Computer Science* 17 (2006) 543–556.
- [11] S. Brlek, X. Provençal, J.-M. Fédou, On the tiling by translation problem, *Discrete Applied Mathematics* 157 (2009) 464–475.
- [12] A. Daurat, M. Nivat, Salient and reentrant points of discrete sets, in: A. del Lungo, V. di Gesu, A. Kuba (Eds.), Proc. IWCI'A'03, Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis, in: *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 12, Elsevier Science, Palermo, Italia, 2003, pp. 208–219.
- [13] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman, New York, 1987.
- [14] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [15] X. Provençal, *Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages*, Ph.D. Thesis, D1715, Université du Québec à Montréal, 2008.
- [16] X. Provençal, Personal Communication, 2010.
- [17] D. Schattschneider, Will it tile? Try the conway criterion!, *Mathematics Magazine* 53 (1980) 224–233.
- [18] H.A.G. Wijnhoff, J. van Leeuwen, Arbitrary versus periodic storage schemes and tessellations of the plane using one type of polyomino, *Information and Control* 62 (1984) 1–25.

- 2.2. *Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways*

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



Contents lists available at ScienceDirect

Theoretical Computer Science

journal homepage: www.elsevier.com/locate/tcs



Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways[☆]

A. Blondin Massé^{a,b}, S. Brlek^{a,*}, A. Garon^a, S. Labbé^{a,c}

^a Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique (LaCIM), Université du Québec à Montréal, C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal, QC, H3C 3P8, Canada

^b Laboratoire de mathématiques (LAMA), Université de Savoie, Bâtiment Chablais, Campus Scientifique, F-73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France

^c Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM), Université Montpellier 2, 161 rue Ada, F-34095 Montpellier Cedex 5, France

ARTICLE INFO

Keywords:
Tessellation
Polyomino
Christoffel word
Fibonacci sequence

ABSTRACT

It has been proved that, among the polyominoes that tile the plane by translation, the so-called squares tile the plane in at most two distinct ways. In this paper, we focus on double squares, that is, the polyominoes that tile the plane in exactly two distinct ways. Our approach is based on solving equations on words, which allows us to exhibit properties about their shape. Moreover, we describe two infinite families of double squares. The first one is directly linked to Christoffel words and may be interpreted as segments of thick straight lines. The second one stems from the Fibonacci sequence and reveals some fractal features.

© 2010 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

During the DGC 2006 conference held in Szeged [1], E. Andres asked for a description of tessellations of the plane with tiles whose boundary is composed of discrete segments. That was the starting point of an investigation that shed new light on connections between discrete geometry, combinatorics on words and also number theory.

The basic object of study is the *polyomino*, ubiquitous in the literature for having applications in numerous fields whose listing is needless for our purpose. There are different types of polyominoes, and by *polyomino* we mean a finite union of unit lattice squares (pixels) in the discrete plane whose boundary is a simple closed path. In particular, a polyomino is simply connected (without holes), and its boundary is simple (does not cross itself). Paths are conveniently encoded by words, called Freeman chain codes, on the alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$, representing the elementary grid steps $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}$.

For instance, starting from S the boundary $\mathbf{b}(P)$ of the polyomino P in Fig. 1 is coded (counterclockwise) by the word

$$w = 01012223212333030011.$$

Observe that we may consider these boundary words as circular, which avoids fixing an origin. Moreover, the *perimeter* of a polyomino P is the length of its boundary words and is an even number.

The problem of deciding if a given polyomino tiles the plane by translation was first considered by Wisjhoff and Van Leeuwen [2] who coined the term *exact polyomino* for these. Beauquier and Nivat [3] characterized them by stating that the boundary $\mathbf{b}(P)$ of an exact polyomino P satisfies the following (not necessarily in a unique way) factorization

$$\mathbf{b}(P) = A \cdot B \cdot C \cdot \widehat{A} \cdot \widehat{B} \cdot \widehat{C} \quad (1)$$

[☆] With support of the NSERC.

* Corresponding author. Tel.: +1 514 987 3000x7775.

E-mail addresses: blondin_masse.alexandre@courrier.uqam.ca (A. Blondin Massé), brlek.srecko@uqam.ca, slabqc@gmail.com (S. Brlek), garon.ariane@courrier.uqam.ca (A. Garon), labbe.sebastien@courrier.uqam.ca (S. Labbé).

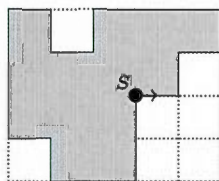


Fig. 1. A polyomino and its boundary.

where at most one of the variables is empty, and where \widehat{X} denotes the path X traveled in the opposite direction. Hereafter, this condition is referred to as the BN-factorization. For example, the polyomino in Fig. 2 (left) is exact and its boundary may be factorized as **101 · 2 · 23212 · 323 · 0 · 03010**.

Polyominoes having a factorization with A, B and C nonempty are called *pseudo-hexagons*, while *pseudo-squares* designate those for which one of the variables is empty. From now on, we call them *squares* for simplicity. It has been shown in [4] that there exist polyominoes admitting an arbitrary number of distinct non-trivial factorizations as pseudo-hexagons. Surprisingly, the situation is different for squares, and it was conjectured in [4] that a polyomino cannot have more than two distinct square factorizations.



Fig. 2. Left: A pseudo-hexagon. Right: A double square and its two tilings.

Polyominoes admitting two distinct square factorizations (Fig. 2 right) are called *double squares*. An exhaustive search based on Eq. (1) allows us to enumerate double squares exhaustively, but since they have very specific structural properties, this leads to a more efficient way to generate them. Moreover, another conjecture on double squares states that the factors of the BN-factorizations are palindromes. For more details on tiling by translation and square tilings see [1,4,5].

In this paper we use a combinatorial approach, relying on efficient techniques [1,6], for constructing two classes of double square polyominoes [7]. These two families are important for the zoology because they describe entirely the table of small double squares available in [4]. The first is composed of Christoffel tiles, those for which the boundary word is composed of crenelated versions of two digitized segments (answering partially to E. Andres' question), for which a characterization is provided (Theorem 6). The second is built on the Fibonacci recurrence: a special family of Fibonacci tiles is completely described (Theorem 11). The palindromicity of the factors in the BN-factorization is proved for both families, and four derived classes of double squares are also presented.

2. Preliminaries

The usual terminology and notation on words is from Lothaire [8]. An *alphabet* \mathcal{A} is a finite set whose elements are called *letters*. A finite word w is a function $w : [1, 2, \dots, n] \rightarrow \mathcal{A}$, where w_i is the i -th letter, $1 \leq i \leq n$. The *length* of w , denoted by $|w|$, is the integer n . The length of the empty word ε is 0. The *free monoid* \mathcal{A}^* is the set of all finite words over \mathcal{A} . The *reversal* of $w = w_1 w_2 \dots w_n$ is the word $\tilde{w} = w_n w_{n-1} \dots w_1$. Words p satisfying $p = \tilde{p}$ are called *palindromes*. A word u is a *factor* of another word w if there exist $x, y \in \mathcal{A}^*$ such that $w = xuy$. We denote by $|w|_u$ the number of occurrences of u in w . Two words u and v are *conjugate*, written $u \equiv v$ or sometimes $u \equiv_{|x|} v$, when x, y are such that $u = xy$ and $v = yx$. Conjugacy is an equivalence relation.

In this paper, the alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$ is considered as the additive group of integers mod 4. Basic transformations on \mathcal{F} are rotations $\rho^i : x \mapsto x + i$ and reflections $\sigma_i : x \mapsto i - x$, which extend uniquely to morphisms (w.r.t concatenation) on \mathcal{F}^* . Given a nonempty word $w \in \mathcal{F}^*$, the *first differences word* $\Delta(w) \in \mathcal{F}^*$ of w is

$$\Delta(w) = (w_2 - w_1) \cdot (w_3 - w_2) \cdot \dots \cdot (w_n - w_{n-1}). \quad (2)$$

Words in \mathcal{F}^* are interpreted as paths in the square grid as usual (see Fig. 3), so that we indistinctly talk of any word $w \in \mathcal{F}^*$ as the *path* w .

Moreover, the word $\widehat{w} := \rho^2(\tilde{w})$ is *homologous* to w , that is, described in a direction opposite to that of w (see Fig. 3(c)).

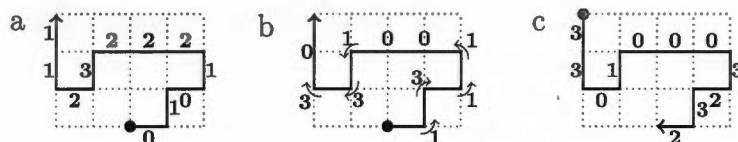


Fig. 3. (a) The path $w = 01012223211$. (b) Its first differences word $\Delta(w) = 1311001330$. (c) Its homologous $\widehat{w} = 33010003232$.

If at least one letter of w is known, the word w can be recovered completely from $\Delta(w)$ using its sequence of partial sums. Then we define the sequence of partial sums $\Sigma_\alpha(w) \in \mathcal{F}^*$ of a word $w \in \mathcal{F}^*$ starting by the letter $\alpha \in \mathcal{F}$ by

$$\Sigma_\alpha(w) = \alpha \cdot (\alpha + w_1) \cdot (\alpha + w_1 + w_2) \cdots (\alpha + w_1 + w_2 + \cdots + w_n).$$

A word $u \in \mathcal{F}^*$ may contain factors in $\mathcal{C} = \{02, 20, 13, 31\}$, corresponding to canceling steps on a path. Nevertheless, each word w can be reduced in a unique way to a word w' , by sequentially applying the rewriting rules in the set $\{u \mapsto \varepsilon \mid u \in \mathcal{C}\}$. The *reduced word* w' of w is nothing but a word in $\mathcal{P} = \mathcal{F}^* \setminus \mathcal{F}^* \mathcal{C} \mathcal{F}^*$. Therefore, we define the *turning number*¹ of w by $\mathcal{T}(w) = (|\Delta(w')|_1 - |\Delta(w')|_3) / 4$.

We also introduce two auxiliary length preserving functions on \mathcal{F}^* that are meaningful for closed paths. The first is defined by

$$\overset{\circ}{\Delta}(w) = \Delta(w) \cdot (w_1 - w_n),$$

while the second is defined by

$$\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha(w) = \alpha \cdot (\alpha + w_1) \cdot (\alpha + w_1 + w_2) \cdots (\alpha + w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1}).$$

We end this section with two results useful for the next section.

Proposition 1 (Provençal [4]). *If a square has two factorizations, then they alternate, i.e. no factor of one factorization is included in a factor of the other one.* \square

Lemma 2. *Let W be the boundary word of a square, and A and B be words such that $W \equiv AB\widehat{A}B$. Then A and B are palindromes if and only if $W = w\rho^2(w)$ for some word w .*

Proof. If $W = w\rho^2(w)$ then every conjugate of W has this form. Therefore, if $W \equiv AB\widehat{A}B$, we have that $AB = \rho^2(\widehat{A}B) = \widetilde{A}\widetilde{B}$, showing that A and B are palindromes. Conversely, one shows that if A and B are palindromes, then $W \equiv AB\rho^2(AB)$. \square

3. Christoffel tiles

Recall that Christoffel words are finite Sturmian words, that is, they are obtained by discretizing a line segment in the plane. Let $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ with $\gcd(p, q) = 1$, and let S be the line segment with endpoints $(0, 0)$ and (p, q) . The word w is a *lower Christoffel word* if the path induced by w is under S and if they both delimit a polygon with no integral interior point. An *upper Christoffel word* is defined similarly. A *Christoffel word* is either a lower Christoffel word or an upper Christoffel word. See Fig. 4(a).

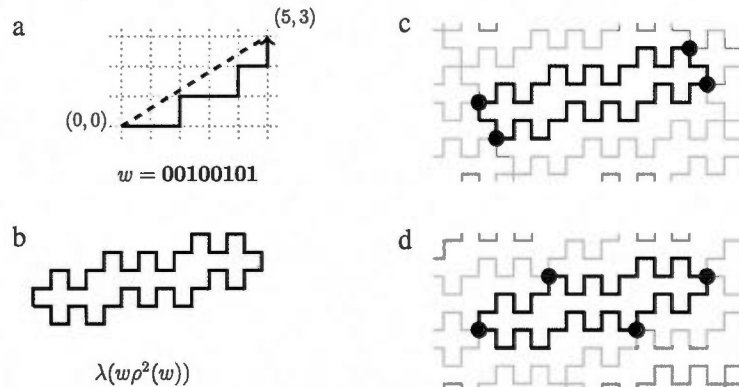


Fig. 4. (a) The lower Christoffel word $w = 00100101$. (b) The Christoffel tile $\lambda(w)\rho^2(\lambda(w))$ is a double square tile, with distinct tilings (c) and (d).

It is well known that if w and w' are respectively the lower and upper Christoffel words associated to (p, q) , then $w' = \widetilde{w}$. Moreover, we have $w = 0m1$ and $w' = 1m0$, where m is a palindrome and $0, 1$ are letters. The word m is called a *cutting word*. They have been widely studied in the literature (see e.g. [9], where they are also called *central words*).

The next theorem gives a very useful characterization of Christoffel words.

Theorem 3 (Pirillo [10]). *A word m on the two-letter alphabet $\{0, 1\} \subset \mathcal{F}$ is a cutting word if and only if $0m1$ and $1m0$ are conjugate.* \square

Another useful result is the following.

Proposition 4 (Borel and Reutenauer [11]). *The lower and upper Christoffel words w and w' are conjugate by palindromes.* \square

¹ In [6], the authors used the notion of the *winding number* of w which is $4\mathcal{T}(w)$.

Consider the morphism $\lambda : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ defined by $0 \mapsto 0301$, $1 \mapsto 01$, $2 \mapsto 2123$ and $3 \mapsto 23$, which can be seen as a “crenelation” of the four canonical steps. Two useful properties of λ are used throughout the rest of this section and are easy to establish.

Lemma 5. *Let $v, v' \in \mathcal{F}^*$. Then*

- (i) $1\lambda(v)$ is a palindrome if and only if v is a palindrome.
- (ii) $\lambda(v) \equiv \lambda(v')$ if and only if $v \equiv v'$.

Theorem 6. *Let $w = 0v1 \in \{0, 1\}^* \subset \mathcal{F}^*$.*

- (i) *If v is a palindrome, then $\lambda(w\rho^2(w))$ is a square tile.*
- (ii) *$\lambda(w\rho^2(w))$ is a double square if and only if w is a Christoffel word.*

Proof. (i) First, we have the square factorization

$$\lambda(w\rho^2(w)) = 0301\lambda(v)01212\rho^2(1\lambda(v))23 \equiv 303 \cdot 01\lambda(v)0 \cdot \widehat{303} \cdot \widehat{01\lambda(v)}0.$$

Now we show that $\lambda(w\rho^2(w))$ is simple. Clearly, $\lambda(w)$ and $\lambda(\rho^2(w))$ are simple since they both contain three letters and no word of the form $\alpha\bar{\alpha}$. Moreover, if P and Q denote respectively the starting and ending points of $\lambda(w)$, then the path $\lambda(w)$ is below the line PQ while $\lambda(\rho^2(w))$ is above.

(ii) (\Rightarrow) Assume that W is a double square. Let $W = \lambda(w\rho^2(w))$ be its boundary word, where $w = 0v1 \in 0\text{Pal}(\mathcal{F}^*)1$. Since W factorizes as

$$W = 303 \cdot 01\lambda(v)0 \cdot \widehat{303} \cdot \widehat{01\lambda(v)}0, \quad (3)$$

and since the factorizations must alternate (Proposition 1), the second factorization starts with the second or the third letter of W . Let W', W'' be such that $W \equiv_1 W'$ and $W \equiv_2 W''$ and V', V'' be respectively the first half of W' and W'' . Then, by Lemma 2, either V' or V'' is a product of two palindromes x and y . First, assume that the other factorization is obtained from V' . Then $V' = \lambda(0v1) = 0301\lambda(v)01 = xy$. Taking the reversal on both sides, we get $\lambda(\widehat{0v1}) = yx$, that is $\lambda(0v1) \equiv \lambda(\widehat{0v1})$. But

$$\begin{aligned} \lambda(\widehat{0v1}) &= 10\lambda(v)1030 = 101\lambda(v)030 = 101\lambda(v)030 \\ &\equiv 01\lambda(v)0301 = \lambda(1v0), \end{aligned}$$

which means that $\lambda(0v1) \equiv \lambda(1v0)$. Thus, by Lemma 5, it follows that $0v1 \equiv 1v0$. Hence, by Theorem 3, v is a cutting word so that $w = 0v1$ is a lower Christoffel word. It remains to consider the case where the second factorization is obtained from V'' . We could then write $V'' = 301\lambda(v)012 = xy$. But such palindromes x and y cannot exist since 2 appears only at the end of V'' .

(\Leftarrow) Assume that $w = 0v1$ is a lower Christoffel word. It is well known that v is a palindrome. Then from (i), $\lambda(w\rho^2(w))$ is the boundary of a square tile. We know from Proposition 4 that $w = 0m01m'1$ for some other palindromes m and m' . Therefore,

$$\begin{aligned} \lambda(w\rho^2(w)) &= \lambda(0m01m'1)\rho^2(\lambda(0m01m'1)) \\ &= 0301\lambda(m)030 \cdot 101\lambda(m')01 \cdot 2123\rho^2(\lambda(m))212 \cdot 323\rho^2(\lambda(m'))23, \end{aligned}$$

showing that P admits a second square factorization. \square

We say that a crenelated tile $\lambda(w\rho^2(w))$ obtained from a lower Christoffel word w is a *basic Christoffel tile* while a *Christoffel tile* is a polyomino isometric to a basic Christoffel tile under some rotations ρ and symmetries σ_i . Observe that, in view of Lemma 2, if $W \equiv A\bar{B}A\bar{B}$ is the boundary word of a Christoffel tile, then the factors A and B are palindromes, a result compatible with the conjecture of Provençal and Vuillon [4]. To conclude this section, we extract interesting statistics of the Christoffel tiles.

Proposition 7. *Let T be a Christoffel tile obtained from the (p, q) -Christoffel word, where p and q are relatively prime. Then the perimeter and the area of T are given respectively by $P(T) = 8p + 4q$ and $A(T) = 4p + 3q - 2$.*

Proof. Let $w = 0v1$ be the (p, q) -Christoffel word. First, we have

$$P(T) = |\lambda(w)\rho^2(\lambda(w))| = 2|\lambda(w)| = 2(4|w|_0 + 2|w|_1) = 8p + 4q.$$

On the other hand, it follows from Eq. (3) in the proof of Theorem 6 that the area of a T is exactly the area of the parallelogram determined by the vectors $\vec{A} = \widehat{303} = (1, -2)$ and

$$\vec{B} = \widehat{01\lambda(v)}0 = (2, 1) + (2|v|_0 + |v|_1, |v|_1) = (2p + q - 1, q).$$

Hence, $A(T) = |\vec{A} \times \vec{B}| = 4p + 3q - 2$. \square

4. Fibonacci tiles

Among Sturmian words, the most famous one is the Fibonacci word

$abaababaabaababaababa \dots$

defined as the limit of the sequence satisfying $f_{-1} = b, f_0 = a$, and, for $n \geq 1, f_n = f_{n-1}f_{n-2}$. Equivalently, one may prove that \mathbf{f} is the fixed point of the morphism $\varphi : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ defined by $\varphi(a) = ab$ and $\varphi(b) = a$.

From \mathbf{f} , it is possible to derive naturally a path on \mathcal{F} having remarkable properties. The construction is obtained as follows. First, rewrite the Fibonacci word on the alphabet $\{2, 0\} \subset \mathcal{F}$ instead of $\{a, b\}$. Then

$\mathbf{f} = 2022020220220220202 \dots$

Next, apply the operator Σ_1 followed by the operator Σ_0 . This yields the word

$\mathbf{p} = \Sigma_0 \Sigma_1 \mathbf{f} = 01030323030101210103010121232 \dots$

which is as an infinite path on the square grid (see Fig. 5). It has been discovered independently in [12], where the construction is equivalent but slightly different.

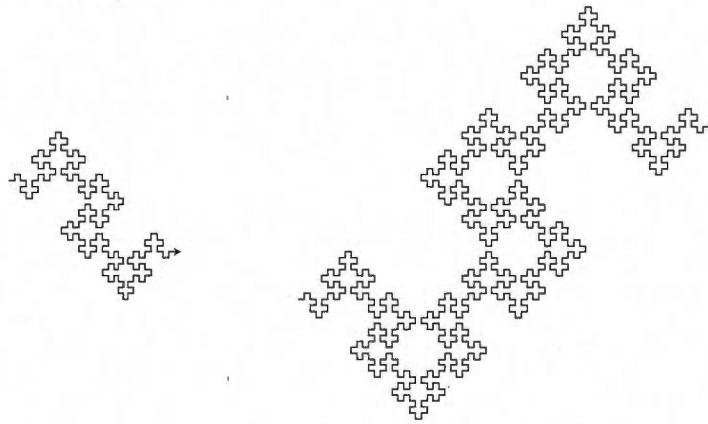


Fig. 5. The prefixes of length 233 (left) and 987 (right) of the path \mathbf{p} .

It is convenient to express the path \mathbf{p} by means of the turns *right* and *left* (encoded respectively by **3** and **1**) instead of the four elementary steps **0**, **1**, **2** and **3**. Thus, the sequence of turns of the path \mathbf{p} is given by $\Sigma_1 \mathbf{f}$ or, equivalently, by $\Delta \mathbf{p}$. We shall denote the sequence of turns by \mathbf{q} .

Hereafter, in order to simplify the notation, we define $\bar{w} = \sigma_0(w)$ for all $w \in \mathcal{F}^*$. Hence, $\bar{0} = 0, \bar{1} = 3, \bar{2} = 2$ and $\bar{3} = 1$ and the words w of \mathcal{F}^* satisfying $\bar{w} = w$ are called σ_0 -palindromes.

Consider the sequence $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{F}^* defined by $q_0 = \varepsilon, q_1 = 3$ and

$$q_n = \begin{cases} q_{n-1}q_{n-2} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ q_{n-1}\bar{q}_{n-2} & \text{if } n \equiv 0, 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

whenever $n \geq 2$. The first terms of $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are

$$\begin{array}{lll} q_0 = \varepsilon & q_3 = 31 & q_6 = 31131133 \\ q_1 = 3 & q_4 = 311 & q_7 = 3113113313313 \\ q_2 = 3 & q_5 = 31131 & q_8 = 311311331331331131133 \end{array}$$

Moreover, $|q_n| = F_n$ is the n -th Fibonacci number.

Proposition 8 (Blondin Massé and Paquin [13]). *The sequence \mathbf{q} of turns is the limit of the sequence $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Proof. Since $\Delta(\mathbf{q}) = \mathbf{f}$, it suffices to show that $\Delta(q_n)\alpha_n = f_{n-1}$ for all integers $n \geq 3$, where $\alpha_n = \sigma_2^n(2)$. The proof is done by induction on n . First, we have $\Delta(q_3)\sigma_2^3(2) = \Delta(31)0 = 20 = f_2$, $\Delta(q_4)\sigma_2^4(2) = \Delta(311)2 = 202 = f_3$ and $\Delta(q_5)\sigma_2^5(2) = \Delta(31131)0 = 20220 = f_4$. Now, assume that the result holds for all integers m such that $3 \leq m < n$ and let us show that it also holds for n . We only prove the case $n \equiv 2 \pmod{3}$ since the argument is similar for the cases $n \equiv i \pmod{3}$, $i \in \{0, 1\}$. Let $n = 3k + 2$ for some integer k . Then

$$\begin{aligned} \Delta(q_{3k+2})\alpha_{3k+2} &= \Delta(q_{3k+1}q_{3k})\alpha_{3k+2} \\ &= \Delta(q_{3k+1})\Delta(\sigma_0^k(3)3)\Delta(q_{3k})\alpha_{3k+2} \\ &= \Delta(q_{3k+1})\sigma_2^k(0)\Delta(q_{3k})\alpha_{3k+2} \\ &= \Delta(q_{3k+1})\alpha_{3k+1}\Delta(q_{3k})\alpha_{3k} \\ &= f_{3k+1}f_{3k} = f_{3k+2}, \end{aligned}$$

and the result follows. \square

Given $\alpha \in \mathcal{F}$, the path $\Sigma_\alpha q_n$ exhibits interesting symmetry properties.

Lemma 9 (Blondin Massé et al. [14]). Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha = \sigma_0^n(3)$. Then $q_{3n+1} = p\alpha$, $q_{3n+2} = r\alpha$ and $q_{3n+3} = s\bar{\alpha}$ for some σ_0 -palindrome p and some palindromes r and s .

Proof. By induction on n . For $n = 0$, we have indeed $q_1 = \varepsilon \cdot 3$, $q_2 = \varepsilon \cdot 3$ and $q_3 = 3 \cdot 1$. Now, assume that $q_{3n+1} = p\alpha$, $q_{3n+2} = r\alpha$ and $q_{3n+3} = s\bar{\alpha}$ for some σ_0 -palindrome p , some palindromes r, s and $\alpha = \sigma_0^n(3)$. Then

$$\begin{aligned} q_{3n+4} &= q_{3n+3} \overline{q_{3n+2}} = q_{3n+3} \overline{q_{3n+1} q_{3n+2}} = r\alpha \overline{p\alpha r} \cdot \sigma_0^{n+1}(3) \\ q_{3n+5} &= q_{3n+4} q_{3n+3} = q_{3n+3} \overline{q_{3n+2}} q_{3n+3} = s\bar{\alpha} r \alpha s \cdot \sigma_0^{n+1}(3) \\ q_{3n+6} &= q_{3n+5} \overline{q_{3n+4}} = q_{3n+4} q_{3n+3} \overline{q_{3n+2}} = r\alpha \overline{p\alpha r} s \bar{\alpha} r \alpha p \cdot \sigma_0^{n+2}(3). \end{aligned}$$

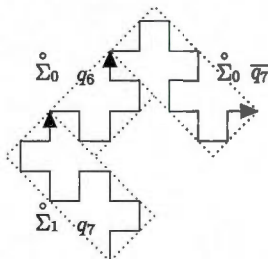
Since $r\alpha \overline{p\alpha r}$ is a σ_0 -palindrome and $s\bar{\alpha} r \alpha s$, $r\alpha \overline{p\alpha r} s \bar{\alpha} r \alpha p$ are palindromes, the result follows. \square

Lemma 10 (Blondin Massé et al. [14]). Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathcal{F}$.

- (i) The path $\Sigma_\alpha q_n$ is simple.
- (ii) The path $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (q_{3n+1})^4$ is the boundary word of a polyomino. \square

Proof. Since the proof is rather technical, we only describe the basic ideas.

- (i) By induction on n . This is clearly verified for $n = 1, 2, 3$. Now, assume that the result holds for all integers m such that $1 \leq m < n$ and let us show that this is also true for n . The idea is to divide the path $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha q_n$ into three smaller parts as follows.



Applying the induction hypothesis, one deduces that the paths $\overset{\circ}{\Sigma}_\beta q_{n-3}$ and $\overset{\circ}{\Sigma}_\gamma q_{n-2}$ are simple as well. It only remains to show that the three smaller paths are contained in disjoint boxes and the result follows.

- (ii) It is sufficient to show that $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (q_{3n+1})^3$ is simple. First, notice that $\overline{q_{3n+5}} = \overline{q_{3n+4} q_{3n+3}} = \overline{q_{3n+3} q_{3n+2} q_{3n+1}} = \overline{q_{3n+2} q_{3n+1} q_{3n+1} q_{3n+2} q_{3n+1}}$. But q_{3n+1} is a prefix of $q_{3n} \overline{q_{3n+2}}$, so that q_{3n+1}^3 is a factor of $\overline{q_{3n+5}}$. From (i), we conclude that $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (q_{3n+1})^3$ is simple as well. \square

A Fibonacci tile of order n is a polyomino having $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (q_{3n+1})^4$ as a boundary word, where $n \in \mathbb{N}$. The first Fibonacci tiles are illustrated in Fig. 6.



Fig. 6. Fibonacci tiles of order $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Fibonacci tiles were considered in [14] from a number theory point of view, and presented slightly differently (see Fig. 7).

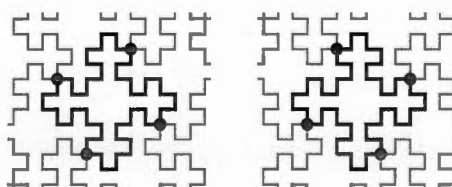


Fig. 7. Tilings of the Fibonacci Tile of order 2 illustrate that it is a double square tile.

Theorem 11. Fibonacci tiles of order $n > 0$ are double squares.

Proof. We know from Lemma 9 that $q_{3n+1} = px$ for some σ_0 -palindrome p and some letter $x \in \{1, 3\}$. If $x = 3$, we consider the reversal of the path, i.e. $\sigma_0((q_{3n+1})^4)$, so that we may suppose that $x = 1$. Therefore, on the one hand we obtain

$$\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (q_{3n+1})^4 = \Sigma_\alpha (p1 \cdot p1 \cdot \sigma_0(\tilde{p})1 \cdot \sigma_0(\tilde{p})) = \Sigma_\alpha p \cdot \Sigma_{\rho(\alpha)} p \cdot \widehat{\Sigma_\alpha p} \cdot \widehat{\Sigma_{\rho(\alpha)} p},$$

because $\mathcal{T}(p) = 0$. On the other hand, the conjugate $q'_{3n+1} = \overline{q_{3n-1}q_{3n}}$ of q_{3n+1} corresponds to another boundary word of the same tile. Using again Lemma 9, we may write $q_{3n} = r1$ and $q_{3n-1} = q3$, for some palindromes q and r . Therefore, $p1 = q_{3n+1} = q_{3n}\overline{q_{3n-1}} = r1\tilde{q}1$ so that $p = r1\tilde{q}$. But p is a σ_0 -palindrome, which means that $q'_{3n+1} = \overline{q_{3n-1}q_{3n}} = \tilde{q}1r1 = \tilde{p}1 = \tilde{p}1$. Hence, since \tilde{p} is an σ_0 -palindrome as well, we find

$$\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (q'_{3n+1})^4 = \Sigma_\alpha (\tilde{p}1 \cdot \tilde{p}1 \cdot \tilde{p}1 \cdot \tilde{p}) = \Sigma_\alpha \tilde{p} \cdot \Sigma_{\rho(\alpha)} \tilde{p} \cdot \widehat{\Sigma_\alpha \tilde{p}} \cdot \widehat{\Sigma_{\rho(\alpha)} \tilde{p}}. \quad \square$$

As for Christoffel tiles, Fibonacci tiles also suggest that the conjecture of Provençal and Vuillon for palindromes in double squares [4] holds.

Corollary 12. If $ABAB$ is a BN-factorization of a Fibonacci tile, then A and B are palindromes.

Proof. The conclusion follows from Theorem 11. Indeed, since p is a σ_0 -palindrome, then $\Sigma_\alpha p$ is a palindrome. The same argument applies for the second factorization. \square

Moreover, the sequence of areas of the Fibonacci tiles

$$A(n) = 1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, \dots$$

is precisely the odd index subsequence of the well-known Pell numbers

$$P(n) = 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, \dots$$

The identity $A(n) = P_{2n+1}$ reveals a link with number theory where Pell numbers play an important role, as established in [14].

4.1. Fibonacci tiles variants

We conclude this section by introducing four variants of the Fibonacci tiles. Consider the sequence $(r_{d,m,n})_{(d,m,n) \in \mathbb{N}^3}$ satisfying the following recurrence, for $d \geq 2$,

$$r_{d,m,n} = \begin{cases} r_{d-1,n,m} \overline{r_{d-2,n,m}} & \text{if } d \equiv 0 \pmod{3} \\ r_{d-1,n,m} r_{d-2,n,m} & \text{if } d \equiv 1 \pmod{3} \\ r_{d-1,m,n} \overline{r_{d-2,m,n}} & \text{if } d \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Using similar arguments as in the Fibonacci tiles case, one shows that both families obtained respectively with seed values

$$r_{0,m,n} = (3113)^m 313, \quad r_{1,m,n} = (3113)^n 3, \quad (4a)$$

$$r_{0,m,n} = (31)^m 313, \quad r_{1,m,n} = (31)^n 31 \quad (4b)$$

are such that $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (r_{3d,m,n} r_{3d,n,m})^2$ is a boundary word whose associated polyomino is a double square (see Fig. 8), where $\alpha \in \mathcal{F}$. Intuitively, the parameters m and n measure the thickness of the tiles (in orthogonal directions), while the parameter d measures their level of fractality.

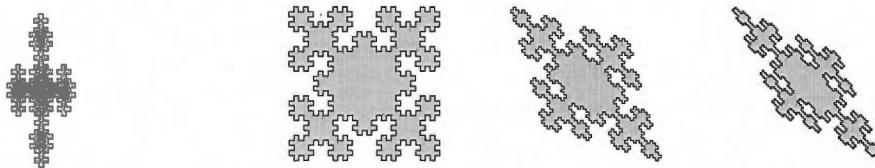


Fig. 8. The tile $\overset{\circ}{\Sigma}_0 (r_{6,0,1} r_{6,1,0})^2$ with seeds (4a); tiles $\overset{\circ}{\Sigma}_0 (r_{9,m,0} r_{9,0,m})^2$ with seeds of type (4b) for $m = 0, 1, 2$.

Similarly, let $(s_{d,m,n})_{(d,m,n) \in \mathbb{N}^3}$ be a sequence satisfying for $d \geq 2$ the recurrence

$$s_{d,m,n} = \begin{cases} s_{d-1,n,m} \overline{s_{d-2,n,m}} & \text{if } d \equiv 0, 2 \pmod{3}, \\ s_{d-1,m,n} \overline{s_{d-2,m,n}} & \text{if } d \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Then the families obtained with seed values

$$s_{0,m,n} = (3113)^m 313, \quad s_{1,m,n} = 31, \quad (5a)$$

$$s_{0,m,n} = (31)^m 313, \quad s_{1,m,n} = 3 \quad (5b)$$

yield double squares $\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha (s_{3d,m,n} s_{3d,n,m})^2$ as well (see Fig. 9). One may verify that $r_{d,0,0} = s_{d,0,0}$ for any $d \in \mathbb{N}$ if the seed values are respectively (4a) and (5b) or respectively (4b) and (5a).



Fig. 9. Tile $\Sigma_0 (s_{9,2,0}s_{9,0,2})^2$ with seeds (5a); tiles $\Sigma_0 (s_{6,0,n}s_{6,n,0})^2$ with seeds (5b) for $n = 1, 2$.

5. Concluding remarks

The study of double squares suggests interesting and challenging problems. For instance, it is appealing to conjecture that a double square is either of Christoffel type or of Fibonacci type. However, that is not the case, as illustrated in Fig. 10.

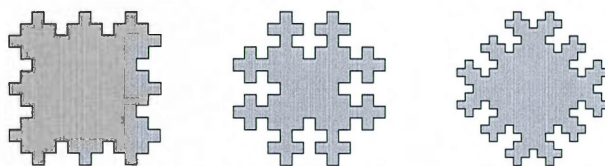


Fig. 10. Three double squares not in the Christoffel and Fibonacci tile families.

This begs for a thorough study in order to exhibit a complete zoology of such tilings. Another problem is to prove that Christoffel and Fibonacci tiles are prime, that is, they are not obtained by the composition of smaller square tiles (see Fig. 11). On the other hand, there is a conjecture of [4] stating that if $AB\bar{A}\bar{B}$ is the BN-factorization of a prime double square, then A and B are palindromes, for which no counter-example has been provided. This leads to a number of questions on the “arithmetics” of tilings, such as the unique decomposition, distribution of prime tiles, and their enumeration. Moreover, it would be interesting to verify if the following statements hold:

- Let $m, n \in \mathbb{N}$ be fixed. The sequence of areas indexed by $d \in \mathbb{N}$ of the four variants of Fibonacci tiles satisfy, for $d \geq 2$, the recurrence

$$A(d) = 6A(d-1) - A(d-2).$$
- The first differences sequence of $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ is the Fibonacci word. Describe the first differences sequence of $\lim_{d \rightarrow \infty} r_{d,m,n}$ and $\lim_{d \rightarrow \infty} s_{d,m,n}$.
- If $\alpha\alpha$ appears in the boundary word of a double square tile D , where $\alpha \in \mathcal{F}$, then D is not prime.

Finally, the Fibonacci tiles have fractal characteristics suggesting that Lindemayer systems (L -systems) might be used for their generation. The formal grammars that describe them have been widely studied, and their impact is significant in biology, computer graphics [15] and modeling of plants [16]. Snowflakes (Fibonacci tiles) are one of the numerous designs that are included in this category.

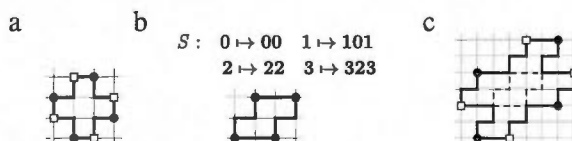


Fig. 11. (a) A prime double square D . (b) A square tile S . (c) The tile $S(D)$, which is obtained by replacing each unit square of D by S , is a double square tile. It is not prime.

Acknowledgements

The results found in this paper were partly driven by computer exploration using the open-source mathematical software Sage [17]. This paper is an extended version of the communication [7] presented at DGCI'09. Finally, we are grateful to the anonymous referees for their careful reading and helpful suggestions that simplified and improved the presentation.

References

- [1] S. Briek, X. Provençal, An optimal algorithm for detecting pseudo-squares, in: A. Kuba, L.G. Nyúl, K. Palágyi (Eds.), DGCI 2006, 13th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, in: LNCS, vol. 4245, Springer-Verlag, 2006, pp. 403–412.
- [2] H.A.G. Wijshoff, J. van Leeuwen, Arbitrary versus periodic storage schemes and tessellations of the plane using one type of polyomino, Inform. Control 62 (1984) 1–25.
- [3] D. Beauquier, M. Nivat, On translating one polyomino to tile the plane, Discrete Comput. Geom. 6 (1991) 575–592.

- [4] X. Provençal, Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages, Ph.D. Thesis, D1715, Université du Québec à Montréal, 2008.
- [5] S. Brlek, X. Provençal, J.-M. Fédou, On the tiling by translation problem, *Discrete Appl. Math.* 157 (2009) 464–475.
- [6] S. Brlek, G. Labelle, A. Lacasse, Properties of the contour path of discrete sets, *Int. J. Found. Comput. Sci.* 17 (2006) 543–556.
- [7] A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon, S. Labbé, Christoffel and Fibonacci tiles, in: S. Brlek, X. Provençal, C. Reutenauer (Eds.), *DGCI 2009, 15th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*, in: LNCS, vol. 5810, Springer-Verlag, 2009, pp. 67–78.
- [8] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] J. Berstel, A. Lauve, C. Reutenauer, F. Saliola, Combinatorics on Words: Christoffel Words and Repetition in Words, in: CRM Monograph Series, vol. 27, American Mathematical Society, 2008, p. 147.
- [10] G. Pirillo, A new characteristic property of the palindrome of standard sturmian word, *Sém. Lothar. Combin.* 43 (1999) 1–3.
- [11] J.-P. Borel, C. Reutenauer, On Christoffel classes, *RAIRO-Theor. Inform. Appl.* 40 (2006) 15–28.
- [12] A. Monnerot Dumaine, The Fibonacci Word fractal, 2009, p. 24.
- [13] A. Blondin Massé, G. Paquin, Personal communication, 2009.
- [14] A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé, M. Mendès France, Fibonacci snowflakes, *Ann. Sci. Math. du Québec* 34 (2) (2010).
- [15] G. Rozenberg, A. Salomaa (Eds.), *Lindenmayer Systems: Impacts on Theoretical Computer Science, Computer Graphics, and Developmental Biology*, Springer-Verlag, Secaucus, NJ, USA, 2001.
- [16] P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, New York, NY, USA, 1990.
- [17] W. Stein, et al. Sage Mathematics Software (Version 4.3.3), The Sage Development Team, 2010. <http://www.sagemath.org>.

2.3 *Fibonacci snowflakes*

FIBONACCI SNOWFLAKES

ALEXANDRE BLONDIN MASSÉ, SREČKO BRLEK, SÉBASTIEN LABBÉ
AND MICHEL MENDÈS FRANCE

Dedicated to Paulo Ribenboim.

RÉSUMÉ. Nous étudions les mots sur l'alphabet à 2 lettres $\mathcal{T} = \{L, R\}$ qui codent des chemins dans le plan discret $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$. Une récurrence permet de construire des chemins simples associés à une classe de polyominoes que nous appelons *polyominoes de Fibonacci* : ils possèdent une structure de type flocon de neige dont l'aire est donnée par la suite

1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, ...

tandis que leur périmètre s'exprime en terme des nombres de Fibonacci $F(3n+1)$. De plus chacun de ces polyominoes pave le plan par translation.

ABSTRACT. We study words on the 2-letter alphabet $\mathcal{T} = \{L, R\}$ coding simple paths in the discrete plane $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$. A recurrence formula allows to build paths that are simple and linked with a class of polyominoes which we call *Fibonacci polyominoes*: they have a snowflake like structure whose area is given by the sequence

1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, ...

while their perimeter is expressed in terms of the Fibonacci numbers $F(3n+1)$. In addition, each polyomino in this class tiles the plane by translation.

1. Introduction

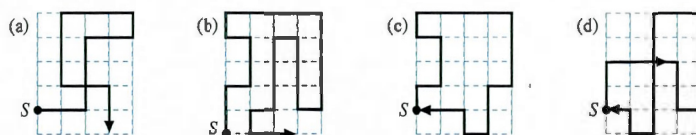
A *path* in the square lattice, identified with $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$, is a polygonal path made of the elementary unit translations

$$i = (0, 1), \quad i^2 = (-1, 0), \quad i^3 = (0, -1), \quad i^4 = (1, 0).$$

These paths are conveniently encoded by words on the alphabet $\mathcal{E} = \{i, -i, 1, -1\}$, and we say that w is *closed* if it satisfies $|w|_i = |w|_{-i}$ and $|w|_1 = |w|_{-1}$, i.e., if the two extremities of the polygonal line coincide. For instance, the words in \mathcal{E} corresponding to the paths in Figure 1(a) (nonclosed) and (d) (closed) are

- (a) $p_1 = 1 \, 1 \, i \, i \, 1 \, 1 \, i \, -1 \, -1 \, -1 \, -i \, -i \, -i \, 1 \, 1 \, -i \, -i,$
- (d) $p_4 = i \, i \, 1 \, 1 \, 1 \, -i \, -i \, 1 \, i \, i \, i \, -1 \, -1 \, -i \, -i \, -i \, -i \, -i \, -1 \, i \, -1.$

A *simple path* (as in (b) or (c)) is a word w such that none of its proper factors is a closed path. A *loop* (like (c)) is a nonempty simple closed path, also called *boundary*

FIGURE 1. Some paths in the discrete plane $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$.

word. A loop splits the plane in two regions, where the exterior one is unbounded while the interior one is bounded and called *polyomino*, as depicted in Figure 1(c).

Another way to describe a path on the square grid is to give the sequence of directions at intersections: a path is fully determined by the starting step $\alpha \in \mathcal{E}$ and the sequence of direction indications, that is left (L), right (R), forward (F) or backward (B) moves. In this note we consider a subclass defined on the alphabet $\mathcal{T} = \{L, R\}$, and in particular the class of paths obtained from words defined by the recurrence

$$q_n = \begin{cases} q_{n-1}q_{n-2} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ q_{n-1}\overline{q_{n-2}} & \text{if } n \equiv 0, 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

where $q_0 = \varepsilon$ (the empty word), $q_1 = R$, and the $\overline{}$ operation consists in exchanging the letters R and L. It turns out that the subsequence q_{3n+1} enables us to construct an infinite sequence $T_F(n)$ of polyominoes, which we call *Fibonacci polyominoes*, with the following properties:

(i) The perimeter, i.e., the length of its contour line, of the polyomino of order n is equal to $4F(3n+1)$, where $F(n)$ is the Fibonacci sequence, with $F(1) = F(2) = 1$.

(ii) The area is given by the sequence (A001653 in [12])

$$1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, \dots$$

defined by the recurrence

$$A(0) = 1, A(1) = 5; \quad A(n) = 6A(n-1) - A(n-2), \quad \text{for } n > 1,$$

this sequence being the subsequence of odd index of the Pell numbers defined by

$$P(0) = 0, P(1) = 1; \quad P(n) = 2P(n-1) + P(n-2), \quad \text{for } n > 1.$$

Geometry on a square grid therefore reveals yet another connection between Fibonacci and Pell numbers. Pell numbers are of course closely related to the continued fraction expansion of $\sqrt{2}$ and to the so-called *Pell equation* $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$, for $X, Y \in \mathbb{N}$. They are described on page 55 in the book "The new book of prime number records" by Paulo Ribenboim [11], in connection with primality testing. These polyominoes are remarkable in that they tile the plane as we shall see later on.

2. Preliminaries

We restrict our study to words on the alphabet $\mathcal{T} = \{L, R\}$ and start by defining some useful functions. We have already met the function $\overline{}$ which exchanges the letters R and L. The *reversal* \tilde{w} of $w = w_1w_2 \dots w_n$ is the word $\tilde{w} = w_nw_{n-1} \dots w_1$, and words satisfying $w = \tilde{w}$ are called *palindromes*. The words w of \mathcal{E}^* or \mathcal{T}^* satisfying

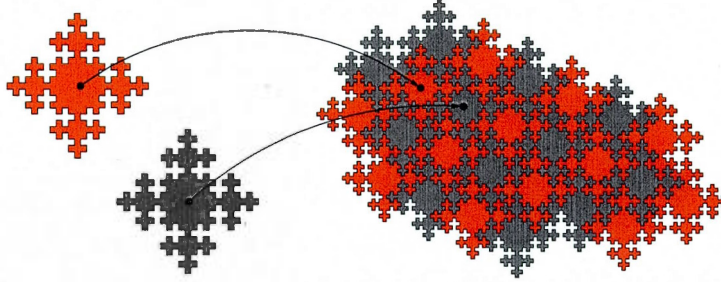


FIGURE 2. A tessellation with a Fibonacci polyomino.

$\widehat{w} = \widetilde{w} = w$ are called *antipalindromes*. The *winding number* $\Delta : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ is defined by $\Delta(w) = |w|_L - |w|_R$ (see [4]). The *empty word* ε satisfies $\Delta(\varepsilon) = 0$, and we also have the following trivial properties:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta(uv) = \Delta(u) + \Delta(v), \\ \Delta(w) = \Delta(\widetilde{w}), \\ \Delta(\overline{w}) = -\Delta(w) = \Delta(\widehat{w}), \\ \Delta(wL) = \Delta(w) + 1, \\ \Delta(wR) = \Delta(w) - 1. \end{cases}$$

Observe that if w is an antipalindrome, then $\Delta(\overline{w}) = 0$.

Let us consider the (right) action $\mathcal{E} \times \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{E}$ by setting for each $\alpha \in \mathcal{E}$:

- (i) $\alpha L = i \cdot \alpha$, $\alpha R = -i \cdot \alpha$,
- (ii) $\alpha \varepsilon = \alpha$,

where \cdot is the usual complex product, often omitted when operands are complex numbers. Clearly, we have $\alpha(wv) = (\alpha w)v$ by associativity.

Theorem 2.1. *We have $\alpha w = i^{\Delta(w)} \alpha$.*

Proof. By induction. Assume the claim true for w . Then

$$\alpha wL = (\alpha w)L = i^{\Delta(w)} \alpha L = i^{\Delta(w)+1} \alpha = i^{\Delta(wL)} \alpha,$$

and the result is true for wL . Similarly for wR . ✦

The next property is obvious and describes the action of \overline{w} on α . It follows from the fact that αw and $\alpha \overline{w}$ are symmetric with respect to the axis defined by α .

Corollary 2.2. *Let $w \in \mathcal{T}^*$ and $\alpha \in \mathcal{E}$. Then,*

$$\alpha \overline{w} = \begin{cases} \alpha w & \text{if } \Delta(w) \equiv 0 \pmod{2}, \\ -\alpha w & \text{otherwise.} \end{cases}$$

To each pair $(\alpha, w) \in \mathcal{E} \times \mathcal{T}^*$, corresponds a polygonal path Γ whose first side is α and whose subsequent sides are obtained by reading the instructions L or R of w .

The sequence $z_0 = 0, z_1 = \alpha, \dots, z_{|w|+1}$ of vertices of Γ is computed by

$$z_{\ell+1} = \alpha \sum_{k=1}^{\ell} i^{\Delta(w[1,k])}, \quad \text{for } 0 \leq \ell \leq |w|,$$

where $w[1, k] = w_1 w_2 \dots w_k$, denotes the prefix of length k of w (by convention $w[1, 0] = \varepsilon$). For sake of simplicity, we denote $\overrightarrow{\alpha w}$ the vector $\overrightarrow{z_0, z_{|w|+1}}$. Notice that Δ trivially extends to paths. Each closed path is identified with the word w , dropping the starting step α . By abuse of terminology we often identify w with a path, and if we want to distinguish, we say that w represents some path y . The composition $\hat{\cdot} = \cdot \circ \sim$ is interpreted as follows: if $w \in \mathcal{T}^*$ is a path, then \hat{w} is the reverse path which runs backwards. We recall from [4] a property of closed paths.

Lemma 2.3. *If a path $w \in \mathcal{T}^*$ is closed then $\Delta(w) \equiv 0 \pmod{3}$.*

Given a nonempty word $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathcal{T}^*$, let w^- denote the word obtained by removing the last letter, that is, $w^- = w_1 w_2 \dots w_{n-1}$.

Theorem 2.4. *Let $w \in \mathcal{T}^*$ and $\alpha \in \mathcal{E}$. The following properties hold:*

- (i) *If $\alpha w = \pm i \alpha$ then $w^3 w^-$ is a closed path.*
- (ii) *If $\alpha w = -\alpha$ then $w w^-$ is a closed path.*
- (iii) *If $\alpha w = \alpha$ then either w^- is a closed path, so that w^n is bounded as $n \rightarrow \infty$, or w^- is open and $|\overrightarrow{\alpha w^n}| = cn$.*

Proof. (i) In this case, the initial step α is rotated by an angle of $\pm\pi/2$, illustrated in Figure 3 with an angle of $+\pi/2$ counterclockwise. Taking four copies of w corre-

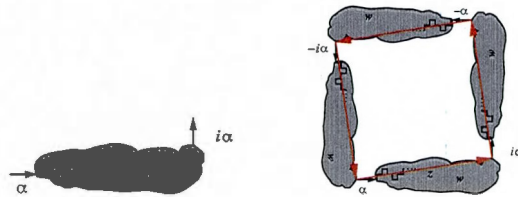


FIGURE 3. Case (i) with a $+\pi/2$ angle.

sponds to a closed polygonal path where the first side α corresponds to the last side α . This is illustrated with an angle $+\pi/2$ in the figure on the right. So that the computation of $\alpha w^3 w^-$ amounts to compute $z + iz + i^2 z + i^3 z = 0$, where $z = \overrightarrow{\alpha w^-}$.

Property (ii) is similar with a $\pm\pi$ rotation. As for (iii), if w^- is not closed, then



FIGURE 4. Case (iii).

obviously, $\alpha w = \alpha$ represents a nontrivial translation of α , and therefore the two

endpoints of the polygonal path corresponding to αw^n are cn apart for some constant $c > 0$, as shown in Figure 4. Finally, if w^- is closed, then clearly the polygonal path corresponding to w^n is bounded. ❖

The above proof in case (i) uses the rotation among the isometric transformations. As we shall see later these transformations are useful for describing our Fibonacci polyominoes. In particular we have the following properties.

Lemma 2.5. *Let $w \in \mathcal{T}^*$, $\alpha \in \mathcal{E}$ and $y \in \alpha\mathcal{E}^*$ such that $y = (\alpha, w)$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) $\hat{y} = (i^2, w)$.
- (ii) y is a palindrome.
- (iii) w is an antipalindrome.

Lemma 2.6. *Let $w \in \mathcal{T}^*$ and Γ its corresponding polygonal line. Let $\alpha \in \mathcal{E}$ and M be the midpoint of the vector $\mathbf{z} = \overrightarrow{\alpha w}$.*

- (i) w is a palindrome if and only if the perpendicular to $\overrightarrow{\alpha w}$ at M is a symmetry axis for Γ .
- (ii) w is an antipalindrome if and only if Γ is symmetric with respect to M .

Observe that if w is an antipalindrome then the algebraic area between \mathbf{z} and Γ is null.

3. Fibonacci snowflakes

Recall that the sequence $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{T}^* is defined by $q_0 = \varepsilon$, $q_1 = R$ and

$$q_n = \begin{cases} q_{n-1}q_{n-2} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ q_{n-1}\overline{q_{n-2}} & \text{if } n \equiv 0, 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

whenever $n \geq 2$. The first terms of $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are

$$\begin{array}{lll} q_0 = \varepsilon & q_3 = RL & q_6 = RLLRLLRR \\ q_1 = R & q_4 = RLL & q_7 = RLLRLLRRLRRLR \\ q_2 = R & q_5 = RLLRL & q_8 = RLLRLLRRLRRLRLLRLLRR. \end{array}$$

Note that $|q_n| = F_n$ is the n -th Fibonacci number. Moreover, the paths q_n present strong symmetry properties, as shown by the next lemma.

Proposition 3.1. *Let $n \in \mathbb{N}$. There exist an antipalindrome t , two palindromes p, r and a letter $a \in \{L, R\}$ such that $q_{3n+1} = ta$, $q_{3n+2} = pa$ and $q_{3n+3} = r\bar{a}$.*

Proof. By induction on n . For $n = 0$, we have indeed $q_1 = \varepsilon \cdot R$, $q_2 = \varepsilon \cdot R$ and $q_3 = R \cdot L$. Now, assume that $q_{3n+1} = ta$, $q_{3n+2} = pa$ and $q_{3n+3} = r\bar{a}$ for some

antipalindrome t , some palindromes p, r and some letter $a \in \{L, R\}$. Then

$$(2) \quad \begin{aligned} q_{3n+4} &= q_{3n+3} \overline{q_{3n+2}} = q_{3n+2} \overline{q_{3n+1}} \overline{q_{3n+2}} = p \overline{a t a p} \cdot \overline{a} \\ q_{3n+5} &= q_{3n+4} q_{3n+3} = q_{3n+3} \overline{q_{3n+2}} q_{3n+3} = r \overline{a p a r} \cdot \overline{a} \\ q_{3n+6} &= q_{3n+5} \overline{q_{3n+4}} = q_{3n+4} q_{3n+3} \overline{q_{3n+4}} = p \overline{a t a p a r a p a t a p} \cdot a. \end{aligned}$$

Since $p \overline{a t a p}$ is an antipalindrome and $r \overline{a p a r}$, $p \overline{a t a p a r a p a t a p}$ are palindromes, the result follows. \clubsuit

The proof above also shows that the winding number can take only three values.

Corollary 3.2. *Let $n \in \mathbb{N}$. Then we have*

- (i) $\Delta(q_{3n}) = 0$,
- (ii) $\Delta(q_{3n+1}) = \Delta(q_{3n+2}) = (-1)^{n+1}$.

Proof. (i) By definition we have $q_{3n+3} = q_{3n+1} q_{3n} \cdot \overline{q_{3n+1}}$. Equations (1) imply that $\Delta(q_{3n+3}) = \Delta(q_{3n})$, and the claim follows by induction.

(ii) By definition we have $q_{3n+2} = q_{3n+1} \cdot q_{3n}$ so that $\Delta(q_{3n+2}) = \Delta(q_{3n+1})$ by what precedes. Since $q_{3n+1} = t a$ for some antipalindrome t , it follows from Equations (1) that

$$\Delta(q_{3n+1}) = \Delta(t a) = \Delta(a) = \pm 1.$$

Finally, Equation (2) shows that $\Delta(q_{3n+1}) = -\Delta(q_{3n+4})$, and $\Delta(q_4) = -1$ permits to conclude the proof. \clubsuit

We first show that the coordinates of the vector $\overrightarrow{\alpha q_n}$ are expressed in terms of Pell numbers.

Lemma 3.3. *Let $\alpha \in \mathcal{E}$. Then for all $n \in \mathbb{N}$, we have*

$$\begin{cases} \overrightarrow{\alpha q_{3n}} &= \alpha \cdot (P(n), (-1)^n P(n)) \\ \overrightarrow{\alpha q_{3n+1}} &= \alpha \cdot (P(n+1), (-1)^n P(n)) \\ \overrightarrow{\alpha q_{3n+2}} &= \alpha \cdot (P(n) + P(n+1), 0) \end{cases}$$

where \cdot is the usual complex product.

Proof. By induction on n . For $n = 0$, we have $\overrightarrow{\alpha q_0} = (0, 0)$, $\overrightarrow{\alpha q_1} = \alpha \cdot (1, 0)$ and $\overrightarrow{\alpha q_2} = \alpha \cdot (1, 0)$. Assume that the claim is true for $k = 0, 1, 2, \dots, 3n+3$. Then, since $q_{3n+4} = q_{3n+3} \overline{q_{3n+2}}$ we have, by Corollary 3.2(i) that $\Delta(q_{3n+3}) = 0$, so that the action of q_{3n+3} leaves the direction α unchanged. Passing to vectors we have

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha q_{3n+4}} &= \overrightarrow{\alpha q_{3n+3}} + \overrightarrow{\alpha q_{3n+2}} \\ &= \alpha \cdot \left(\overrightarrow{1 q_{3n+3}} + \overrightarrow{1 q_{3n+2}} \right) \\ &= \alpha \cdot \left((P(n+1), (-1)^{n+1} P(n+1)) + (P(n) + P(n+1), 0) \right) \\ &= \alpha \cdot (2P(n+1) + P(n), (-1)^{n+1} P(n+1)) \\ &= \alpha \cdot (P(n+2), (-1)^{n+1} P(n+1)). \end{aligned}$$

The two other cases are similar and are left to the reader. \clubsuit

The first values of endpoint coordinates of the paths q_n starting from the origin with initial step $\alpha = (1, 0)$ are :

n	0	1	2	3	4	5
q_{3n}	(0, 0)	(1, -1)	(2, 2)	(5, -5)	(12, 12)	(29, -29)
q_{3n+1}	(1, 0)	(2, -1)	(5, 2)	(12, -5)	(29, 12)	(70, -29)
q_{3n+2}	(1, 0)	(3, 0)	(7, 0)	(17, 0)	(41, 0)	(99, 0)

Lemma 3.3 is illustrated in Figure 5 below, where Q_n denotes the smallest rectangle box containing q_n . This leads to the geometric construction of the paths q_n , using the

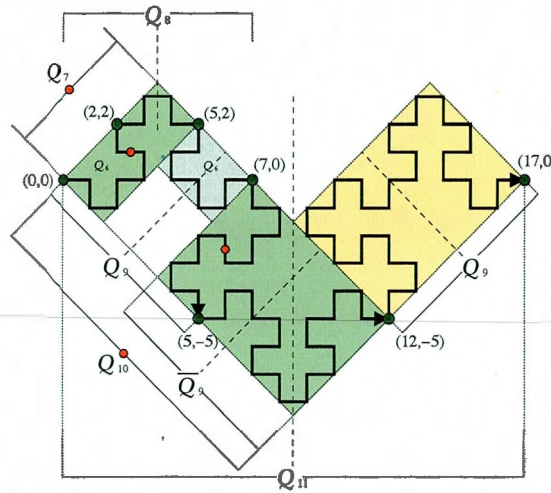


FIGURE 5. The geometric construction of the Fibonacci paths.

symmetries deduced from Proposition 3.1 and Lemma 2.6,

$$Q_n = \begin{cases} Q_{n-1}Q_{n-2} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ Q_{n-1}\overline{Q_{n-2}} & \text{if } n \equiv 0, 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

where the sides of the box are determined by the origin and the endpoint of q_n . Clearly each box is contained in the next one (by prefix property), and the sides have a $\pm\frac{\pi}{4}$ angle since Q_{3n} is so. Observe also that this implies that Q_{3n+2} has a vertical symmetry axis for every n given by the line $z = \frac{P(n)+P(n+1)}{2}$.

Theorem 3.4. For all $n \in \mathbb{N}$, the paths q_n satisfy the following properties:

- (i) $(q_{3n+1})^3 q_{3n+1}$ is closed;
- (ii) $(q_{3n+2})^3 q_{3n+2}$ is closed;
- (iii) q_n is non-intersecting;
- (iv) $(q_{3n+1})^3 q_{3n+1}$ is non-intersecting.

Proof. (i) Since $\Delta(ta) = \Delta(a) = \pm 1$, we are in case (i) of Theorem 2.4 and the result follows.

(ii) As in (i).

(iii) Since by definition q_n is a prefix of q_{n+1} , it suffices to prove that q_{3n} is non-intersecting for all $n \in \mathbb{N}$. First, we show by induction that

$$(3) \quad \overline{q_{3n}} = q_{3n-1} \overline{q_{3n-2}} = q_{3n-2} \overline{q_{3n-1}}.$$

Indeed, it is clearly true for $n = 1$. Then, we have

$$\begin{aligned} \overline{q_{3n+3}} &= q_{3n+2} \overline{q_{3n+1}} = q_{3n+1} q_{3n} \cdot \overline{q_{3n+1}} = q_{3n+1} q_{3n} \cdot \overline{q_{3n} q_{3n-1}} \\ &= q_{3n+1} q_{3n} \cdot \overline{q_{3n-1} q_{3n-2}} \cdot \overline{q_{3n-1}} \\ &= q_{3n+1} \cdot q_{3n} \overline{q_{3n-1}} \cdot q_{3n-2} \overline{q_{3n-1}} \\ &= q_{3n+1} \cdot q_{3n+1} \cdot \overline{q_{3n}} \quad (\text{by induction hypothesis}) \\ &= q_{3n+1} \cdot \overline{q_{3n+2}} \quad (\text{by definition}). \end{aligned}$$

We finish the proof by induction. Assume that $\overline{q_{3n-1}}$ is non-intersecting, which implies that $\overline{q_{3n-k}}$ is also non-intersecting for all $k \in \mathbb{N}$ such that $1 \leq k \leq 3n-1$. Passing to boxes, we have from Equation (3)

$$Q_{3n} = Q_{3n-1} \overline{Q_{3n-2}} = Q_{3n-2} Q_{3n-1},$$

where there is no intersection in neither left or right box Q_{3n-1} .

(iv) Theorem 2.4 implies that $(q_{3n+1})^3 \overline{q_{3n+1}}$ is non-intersecting if $(q_{3n+1})^2$ is non-intersecting. But we have

$$\begin{aligned} (q_{3n+1})^2 &= q_{3n} \overline{q_{3n-1}} \cdot q_{3n} \overline{q_{3n-1}} \\ &= q_{3n} \cdot \overline{q_{3n-1} q_{3n-1}} \cdot \overline{q_{3n-2} q_{3n-1}}, \end{aligned}$$

and since $\overline{q_{3n-1} q_{3n-1}}$ is a factor of $\overline{q_{3n+2}}$, a non-intersecting path by (iii), the claim follows. \diamond

A *Fibonacci snowflake* or *tile* of order n is a polyomino $T_F(n)$ represented by the word $\phi_n = (q_{3n+1})^3 \overline{q_{3n+1}}$, where $n \in \mathbb{N}$. The first Fibonacci snowflakes are shown in Figure 6.



FIGURE 6. Fibonacci snowflakes of order $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

We have already mentioned that the perimeter $L(n)$ of the snowflake of rank n is

$$L(n) = 4F(3n+1) = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{3n+1} - \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{3n+1}.$$

Let $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ be the sequence of areas of the Fibonacci snowflakes. Its first values are

$$1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, \dots,$$

which we shall prove to be the odd index numbers in the Pell sequence whose first values are

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, \dots$$

Recall that the sequence of Pell numbers satisfies the following identity [2]

$$(4) \quad P(2n+1) = P(n+1)^2 + P(n)^2.$$

We are now ready to prove our result on the area of the Fibonacci snowflakes.

Theorem 3.5. *We have $A(n) = P(2n+1)$.*

Proof. The parallelogram determined by the word $(q_{3n+1})^3 q_{3n+1}$ is a square (Theorem 2.4(i)), and by Lemma 2.6(ii) the area of $T_F(n)$ is equal to the area of the square determined by

$$\overrightarrow{\alpha q_{3n+1}} = (P(n+1), \pm P(n)).$$

Hence $A(n) = P(n+1)^2 + P(n)^2$ which is equal to $P(2n+1)$ by Equation (4). \clubsuit

It follows that $A(n)$ satisfies the recurrence formulas

$$A(0) = 1, A(1) = 5; \quad A(n) = 6A(n-1) - A(n-2), \quad \text{for } n > 1.$$

and that its general term is

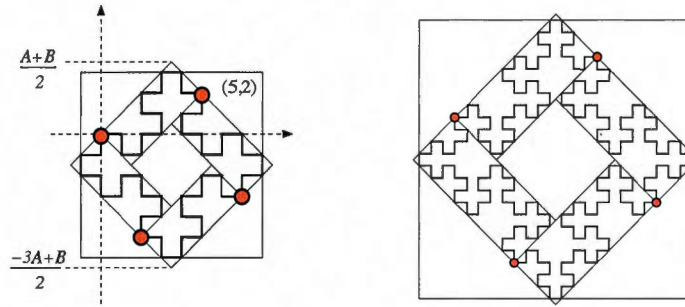
$$A(n) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} (3+2\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} (3-2\sqrt{2})^n.$$

This sequence is already known as defining the numbers n such that $2n^2 - 1$ is a square (see A001653 in [12]) but also for counting diverse combinatorial objects.

Fibonacci snowflakes reveal a new connection between the Fibonacci numbers of index $3n+1$ and odd-index Pell numbers. It is worth noticing that the Markoff numbers also link the two sequences but in a different way: indeed, all odd-index Pell numbers and all odd-index Fibonacci numbers are particular Markoff numbers, a fact already observed by Frobenius [7]. The reader is referred to [5, 10] for recent developments in that direction.

Other connections may be found in combinatorics. For instance, the number of two-stack sortable permutations which avoid the pattern 132 is the Pell number P_n , while the number of two-stack sortable permutations avoiding both 132 and 4123 is $F_{n+4} - 2n - 2$ [6].

A measure of the complexity of the snowflakes. We compute now the limit ratio $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{H(n)}$ between the area of the Fibonacci snowflake and the area of its convex hull, which is half of the area $S(n)$ of the smallest square having sides parallel to the axes and containing it. The squared tiles are shown in Figure 7 for $n = 2, 3$, where $(A, B) = (P(n+1), (-1)^n P(n))$ are the coordinates of $\overrightarrow{\alpha q_{3n+1}}$ given by Lemma 3.3. It is easy to compute $S(n)$:

FIGURE 7. Squared Fibonacci snowflakes of order $n = 2, 3, 4$.

$$S(n) = \left(\frac{A+B}{2} - \frac{-3A+B}{2} - 1 \right)^2 = (2A-1)^2 = (2P(n+1)-1)^2.$$

Then the limit ratio is computed as follows.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{H(n)} &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(2n+1)}{(2P(n+1)-1)^2} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1)^2 + P(n)^2}{(2P(n+1)-1)^2} && \text{(by Equation (4))} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1)^2 + P(n)^2}{4P(n+1)^2 - 4P(n+1) + 1} \\ &= \frac{2}{4} \left(1 + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{P(n+1)} \right)^2 \right) \\ &= 2 - \sqrt{2} \approx 0.585786438. \end{aligned}$$

On the other hand, the value of the ratio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(A(n))}{\log(L(n))} \approx 0.964825683 \dots$$

seems to be linked, loosely speaking, to the complexity of the shape of the boundary of a given nonempty interior set. For a square it equals 2, while for a long and thin rectangle it is practically 1. In the present case the value 0.96482... is a strong hint towards the complicated behavior of our snowflakes.

4. Last remarks

Fibonacci snowflakes are somehow related to the Fibonacci fractals found in [8]. They also form a subclass of tiles used for tiling the plane. Indeed, each Fibonacci tile may be used for tiling the whole plane with translated copies of it, as shown in Figure 2 and 9. More precisely, there exist a class of tiles, called *pseudo-squares*, characterized

by the equation (due to Beauquier and Nivat [1])

$$b(P) \equiv A \cdot B \cdot \hat{A} \cdot \hat{B},$$

where $b(P) \in \mathcal{T}^*$ is a simple closed path. Each such factorization defines the homologous sides of the tile, and hence the way to assemble them.

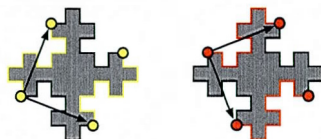


FIGURE 8. Two distinct factorizations.

For instance, the tile $T_F(2)$ in Figure 8 may be assembled as shown on the right. It was conjectured in [9] that a pseudo-square polyomino has at most two distinct nontrivial factorizations, and the Fibonacci tiles are an infinite family having this property [3], providing two distinct tessellations as shown in Figure 9.

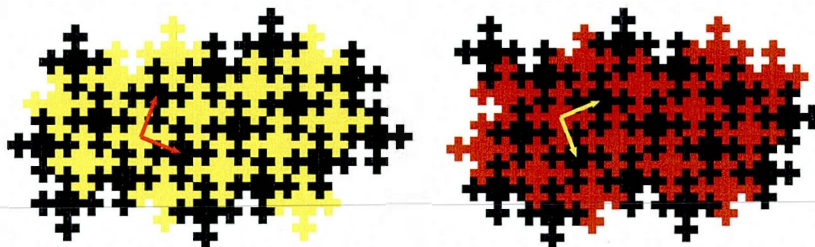


FIGURE 9. Distinct tessellations with $T_F(2)$.

Acknowledgements. The research of S. Brlek was funded by an NSERC (Canada) grant. He also benefited from the support of CNRS (France) during his sabbatical stay at the LaBRI laboratory in Bordeaux. Both A. Blondin Massé and S. Labbé were supported by an Alexander Graham Bell Canada Graduate NSERC scholarship and benefited from the “Programme Frontenac de bourses à la mobilité” (FQRNT, Québec) and French Government.

REFERENCES

- [1] D. Beauquier and M. Nivat, *On translating one polyomino to tile the plane*, Discrete Comput. Geom. **6** (1991), no. 6, 575–592.
- [2] M. Bhargava, K. Kedlaya, and L. Ng, *Solutions to the 60th William Lowell Putnam mathematical competition*, 1999, published electronically at <http://amc.maa.org/a-activities/a7-problems/putnam/-pdf/1999s.pdf>.
- [3] A. Blondin-Massé, S. Brlek, A. Garon, and S. Labbé, *Christoffel and Fibonacci tiles*, Discrete geometry for computer imagery, 67–78, Lecture Notes in Comput. Sci., **5810**, Springer, Berlin, 2009.

- [4] S. Brlek, G. Labelle, and A. Lacasse, *Properties of the contour path of discrete sets*, Int. J. Found. Comput. Sci. **17** (2006), no. 3, 543–556.
- [5] Y. Bugeaud, C. Reutenauer, and S. Siksek, *A Sturmian sequence related to the uniqueness conjecture for Markoff numbers*, Theor. Comput. Sci. **410** (2009), no. 30-32, 2864–2869.
- [6] E. S. Egge and T. Mansour, *132-avoiding two-stack sortable permutations, Fibonacci numbers, and Pell numbers*, Discrete Appl. Math. **143** (2004), no. 1-3, 72–83.
- [7] F. G. Frobenius, *Über die Markoffsche Zahlen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1913), 458–487.
- [8] A. Monnerot-Dumaine, *The Fibonacci word fractal*, 2009, published electronically at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00367972/fr/>.
- [9] X. Provençal, *Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages*, Ph.D. Thesis, U. du Québec à Montréal (2008).
- [10] C. Reutenauer, *Christoffel words and Markoff triples*, Integers **9** (2009), no. 3, 327–332.
- [11] P. Ribenboim, *The new book of prime number records*, Springer, New York, 1996, xxiv+541 pp.
- [12] N. J. A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, published electronically at <http://www.research.att.com/?njas/sequences>.

A. BLONDIN MASSÉ, LACIM, U. DU QUÉBEC À MONTRÉAL, C. P. 8888, SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL, QC, H3C 3P8, CANADA
 blondin_masse.alexandre@courrier.uqam.ca

S. BRLEK, LACIM, U. DU QUÉBEC À MONTRÉAL, C. P. 8888, SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL, QC, H3C 3P8, CANADA
 brlek.srecko@uqam.ca

S. LABBÉ, LACIM, U. DU QUÉBEC À MONTRÉAL, C. P. 8888, SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL, QC, H3C 3P8, CANADA
 labbe.sebastien@courrier.uqam.ca

M. MENDÈS FRANCE, DÉP. DE MATH., UMR 5251, U. BORDEAUX 1, 351 COURS DE LA LIBÉRATION, F-33405 TALENCE CEDEX, FRANCE
 michel.mendes-france@math.u-bordeaux1.fr

2.4 Tuiles de Fibonacci duales

Des généralisations ont aussi été considérées pour les tuiles sur le réseau hexagonal dans (Brlek, Provençal et Fédou, 2009). Dans un tel cas, les tuiles ne peuvent être carrées, mais on peut paver par des tuiles dont le bord est un chemin sans croisement. Sur le réseau carré, dans les deux articles précédents, il a été question de pavage par translation d'un polyomino 4-connexe. Or, les résultats que nous avons développés sur les pavages sont aussi applicables aux polyominos 8-connexes. Par exemple, il existe une autre famille de tuiles qui est apparue naturellement lors de nos recherches qui possèdent des caractéristiques analogues à celles des tuiles de Fibonacci. Dans cette section, nous présentons cette nouvelle famille, que nous appelons tuiles de Fibonacci duales, nous établissons quelques-unes de ses caractéristiques et nous démontrons que ce sont bien des tuiles doubles carrées (voir Figures 2.5 et 2.6).

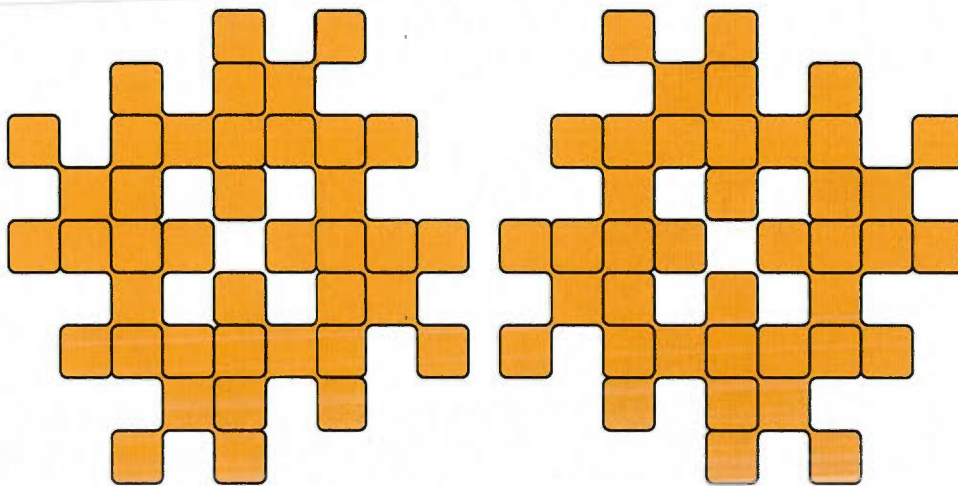


Figure 2.5 Pavages de la tuile de Fibonacci duale d'ordre 1.

On se rappelle que la suite (q_n) a été définie dans l'article *Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways* de la section 2.2 à

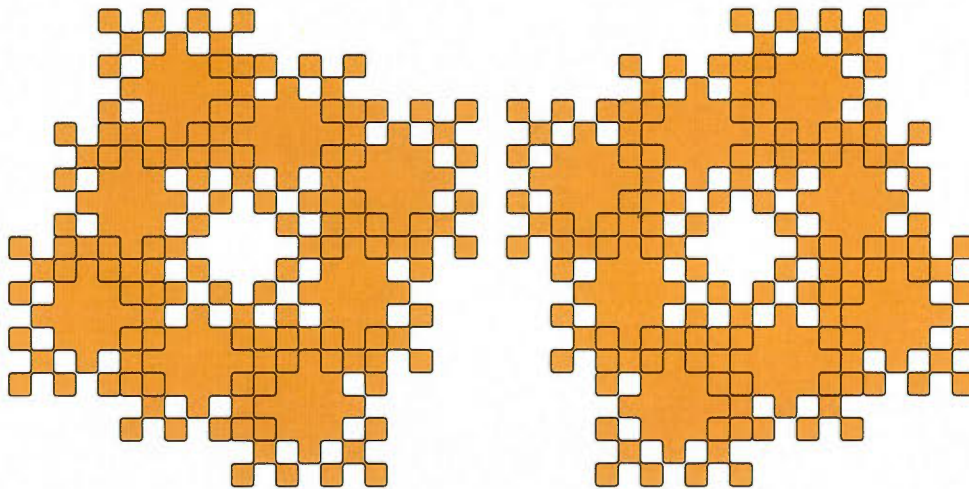


Figure 2.6 Pavages de la tuile de Fibonacci duale d'ordre 2.

partir des valeurs initiales $q_0 = \varepsilon$ et $q_1 = \mathbf{3}$:

$$q_n = \begin{cases} q_{n-1}q_{n-2} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ q_{n-1}\overline{q_{n-2}} & \text{si } n \equiv 0, 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Considérons maintenant la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mots de \mathcal{F}^* définie par les valeurs initiales $t_0 = \mathbf{3}$, $t_1 = \mathbf{3}$ et pour $n \geq 2$, la même définition que la suite (q_n) :

$$t_n = \begin{cases} t_{n-1}t_{n-2} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ t_{n-1}\overline{t_{n-2}} & \text{si } n \equiv 0, 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Rappelons que la réflexion σ_0 d'un mot $w \in \mathcal{F}^*$ est notée par la barre supérieure $\overline{w} = \sigma_0(w)$. Celle-ci échange les lettres $\mathbf{1}$ et $\mathbf{3}$ et fixe les deux autres : $\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{3}$, $\overline{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$ et $\overline{\mathbf{3}} = \mathbf{1}$. Les premiers termes de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont

$t_0 = 3,$
 $t_1 = 3,$
 $t_2 = 33,$
 $t_3 = 331,$
 $t_4 = 33111,$
 $t_5 = 33111331,$
 $t_6 = 3311133111333,$
 $t_7 = 331113311133311333113,$
 $t_8 = 3311133111333113331133311133111333,$
 $t_9 = 3311133111333113331133311133111333113331133311133111331.$

De plus, $|t_n| = |q_{n+1}| = F_n$ est le n -ième nombre de Fibonacci.

Exemple Sage 2.1.

Pour calculer un mot de la suite (q_n) dans Sage, par exemple q_8 , faire la commande suivante :

```
sage: words._fibonacci_tile(8, q_0=None, q_1=3)
word: 311311331331331131133
```

La valeur de t_8 peut aussi être calculée en ajustant les valeurs initiales pour q_0 et q_1 données à la même fonction, car les suites (q_n) et (t_n) suivent la même récurrence :

```
sage: words._fibonacci_tile(8, q_0=3, q_1=3)
word: 3311133111333113331133311133111333
```

Dans la suite, nous démontrons quelques résultats sur la suite (t_n) qui sont semblables ou sinon identiques à des résultats sur la suite (q_n) . Notamment, la suite (t_n) est aussi reliée aux palindromes. Rappelons qu'un *palindrome* est un mot w tel que $w = \widetilde{w}$ et qu'un *f-palindrome* est un mot w tel que $w = f(\widetilde{w})$ où f est une involution.

Lemme 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha = \sigma_0^n(3)$. Alors $t_{3n} = s\alpha$, $t_{3n+1} = p\alpha$ et $t_{3n+2} = r\alpha$ où p est un σ_0 -palindrome et r, s sont des palindromes.

Démonstration. Par récurrence sur n . Si $n = 0$, on a effectivement $t_0 = \varepsilon \cdot \mathbf{3}$, $t_1 = \varepsilon \cdot \mathbf{3}$ et $t_2 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{3}$. Maintenant, supposons que l'énoncé soit vrai pour n et montrons-le pour $n + 1$. On a que

$$\begin{aligned} t_{3n+3} &= t_{3n+2} \overline{t_{3n+1}} = t_{3n+1} t_{3n} \overline{t_{3n+1}} = p\alpha s\alpha \bar{p} \cdot \sigma_0^{n+1}(\mathbf{3}), \\ t_{3n+4} &= t_{3n+3} \overline{t_{3n+2}} = t_{3n+2} \overline{t_{3n+1} t_{3n+2}} = r\alpha \bar{p}\alpha \bar{r} \cdot \sigma_0^{n+1}(\mathbf{3}), \\ t_{3n+5} &= t_{3n+4} t_{3n+3} = t_{3n+3} \overline{t_{3n+2} t_{3n+3}} = p\alpha s\alpha \bar{p}\alpha \bar{r}\alpha \bar{p}\alpha s\alpha \bar{p} \cdot \sigma_0^{n+1}(\mathbf{3}). \end{aligned}$$

Le résultat s'en suit, car $r\alpha \bar{p}\alpha \bar{r}$ est un σ_0 -palindrome et $p\alpha s\alpha \bar{p}$, $p\alpha s\alpha \bar{p}\alpha \bar{r}\alpha \bar{p}\alpha s\alpha \bar{p}$ sont des palindromes. \square

Le mot t_n représente la suite des virages d'un chemin aux propriétés intéressantes. Ce chemin est défini par

$$\Sigma_\alpha(t_n)$$

où $\alpha \in \mathcal{F}$ est la direction initiale. En fixant $\alpha = \mathbf{0}$, les premiers chemins de la suite sont

$$\begin{aligned} \Sigma_0(t_0) &= \mathbf{03}, \\ \Sigma_0(t_1) &= \mathbf{03}, \\ \Sigma_0(t_2) &= \mathbf{032}, \\ \Sigma_0(t_3) &= \mathbf{0323}, \\ \Sigma_0(t_4) &= \mathbf{032301}, \\ \Sigma_0(t_5) &= \mathbf{032301030}, \\ \Sigma_0(t_6) &= \mathbf{03230103012103}, \\ \Sigma_0(t_7) &= \mathbf{0323010301210301032303}, \\ \Sigma_0(t_8) &= \mathbf{03230103012103010323032123032301032}, \\ \Sigma_0(t_9) &= \mathbf{03230103012103010323032123032301032303212321012321230323}. \end{aligned}$$

Exemple Sage 2.3.

Pour calculer $\Sigma_0(t_8)$ dans Sage, faire la commande suivante :

```
sage: t8 = words._fibonacci_tile(8,3,3)
```

```
sage: t8.partial_sums(0, mod=4)
word: 03230103012103010323032123032301032
```

Les dessins des chemins $\Sigma_0([t_n])$ et $\Sigma_0([q_n])$ pour les valeurs de n telles que $0 \leq n \leq 8$ sont illustrés dans les Tableaux 2.1, 2.2 et 2.3. Leurs vecteurs respectifs sont indiqués dans le Tableau 2.4. Dans les travaux de (Monnerot Dumaine, 2009), on retrouve à la section 6.5 une construction qui donne les chemins $\Sigma_0([t_n])$ et une image qui correspond au chemin $\Sigma_0([t_{15}])$. Son article porte sur ce qu'il appelle la fractale du mot de Fibonacci, mais il ne considère pas les fractales fermées. De plus, la fractale qu'il obtient ressemble aux chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$, mais n'est pas équivalente, car elle comporte des pas consécutifs dans la même direction alors que q_n et t_n sont formés uniquement de virages à gauche (1) et virages à droite (3). Entre autres, il calcule la dimension de Hausdorff de la fractale du mot de Fibonacci.

Théorème 2.4. (Monnerot Dumaine, 2009) *La dimension de Hausdorff de la fractale du mot de Fibonacci est $3 \frac{\log \phi}{\log(1+\sqrt{2})} \approx 1.6379 \dots$*

Le nombre d'enroulement des chemins de la suite $\Sigma_0(t_n)$ suit un cycle de longueur 6. Les valeurs exactes sont données dans le lemme suivant.

Lemme 2.5. *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k < 6$, le nombre d'enroulement est donné par la règle suivante :*

$$\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+k})) = \begin{cases} -1/4 & \text{si } k = 0, \\ -1/4 & \text{si } k = 1, \\ -2/4 & \text{si } k = 2, \\ -1/4 & \text{si } k = 3, \\ +1/4 & \text{si } k = 4, \\ 0 & \text{si } k = 5. \end{cases}$$












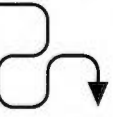
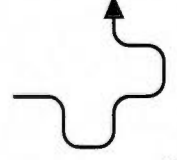
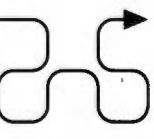
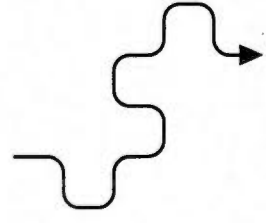
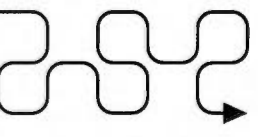
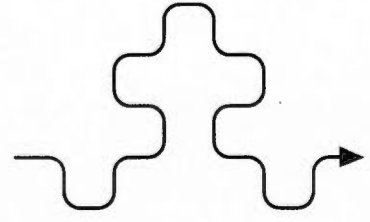
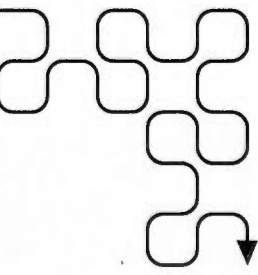
n	$\Sigma_0([q_n])$	$\Sigma_0([t_n])$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Tableau 2.1 Chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $0 \leq n \leq 8$.

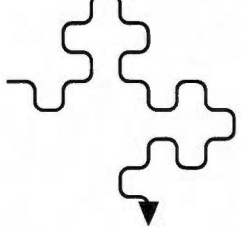
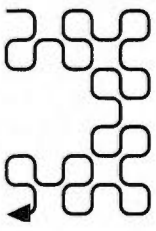
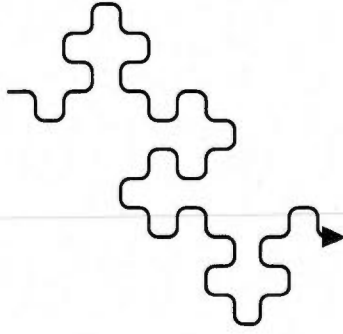
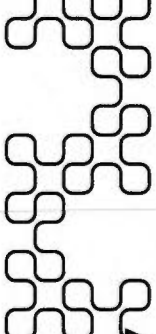
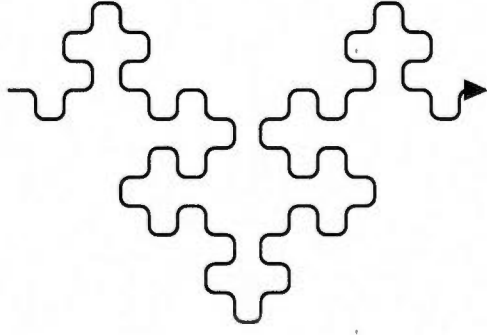
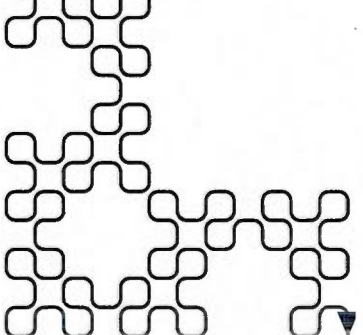
n	$\Sigma_0([q_n])$	$\Sigma_0([t_n])$
9		
10		
11		

Tableau 2.2 Chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $9 \leq n \leq 11$.

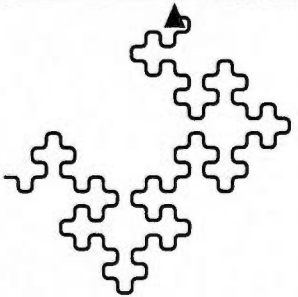
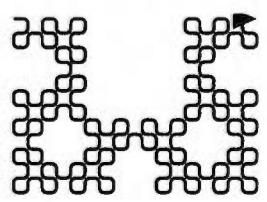
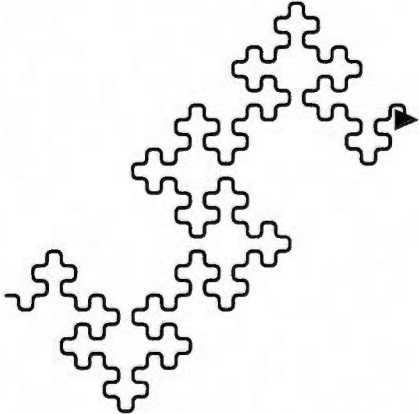
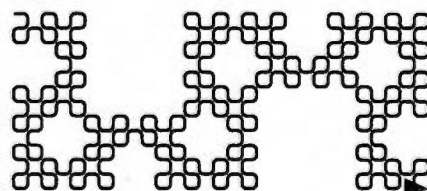
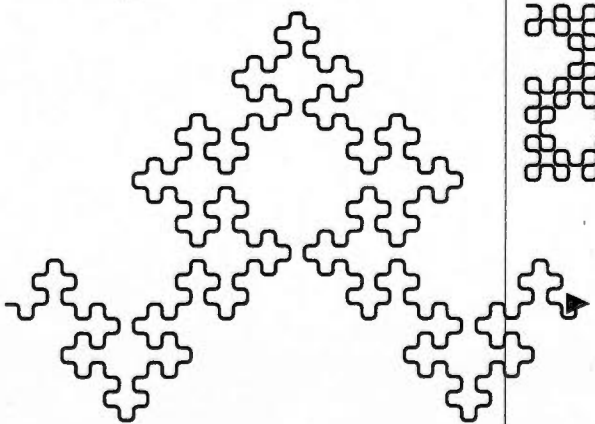
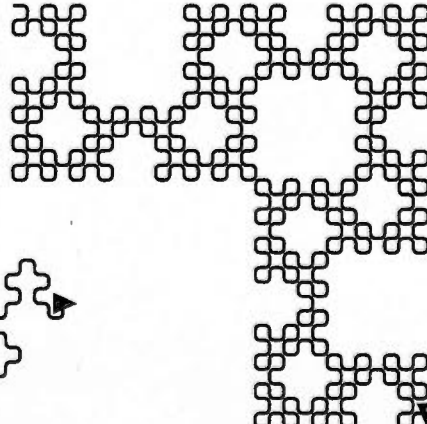
n	$\Sigma_0([q_n])$	$\Sigma_0([t_n])$
12		
13		
14		

Tableau 2.3 Chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $12 \leq n \leq 14$.

n	$\overrightarrow{\Sigma_0(q_n)}$	$\overrightarrow{\Sigma_0(t_n)}$	n	$\overrightarrow{\Sigma_0(q_n)}$	$\overrightarrow{\Sigma_0(t_n)}$	n	$\overrightarrow{\Sigma_0(q_n)}$	$\overrightarrow{\Sigma_0(t_n)}$
0	(0, 0)	(1, 0)	6	(2, 2)	(3, 0)	12	(12, 12)	(17, 0)
1	(1, 0)	(1, 0)	7	(5, 2)	(5, -2)	13	(29, 12)	(29, -12)
2	(1, 0)	(1, -1)	8	(7, 0)	(5, -5)	14	(41, 0)	(29, -29)
3	(1, -1)	(0, -1)	9	(5, -5)	(0, -7)	15	(29, -29)	(0, -41)
4	(2, -1)	(1, -2)	10	(12, -5)	(5, -12)	16	(70, -29)	(29, -70)
5	(3, 0)	(2, -2)	11	(17, 0)	(12, -12)	17	(99, 0)	(70, -70)

Tableau 2.4 Les vecteurs des chemins $\Sigma_0([q_n])$ et $\Sigma_0([t_n])$ pour $n < 18$.

Démonstration. On procède par récurrence. On vérifie pour $n = 0$, puis :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+0})) &= \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n-1}\overline{t_{6n-2}})) = \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n-1})) - \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n-2})) = 0 - 1/4 = -1/4, \\
\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+1})) &= \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n}\overline{t_{6n-1}})) = \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n})) - \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n-1})) = -1/4 - 0 = -1/4, \\
\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+2})) &= \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+1}t_{6n})) = \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+1})) + \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n})) = -1/4 + -1/4 = -2/4, \\
\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+3})) &= \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+2}\overline{t_{6n+1}})) = \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+2})) - \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+1})) = -2/4 - (-1/4) = -1/4, \\
\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+4})) &= \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+3}\overline{t_{6n+2}})) = \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+3})) - \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+2})) = -1/4 - (-2/4) = +1/4, \\
\mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+5})) &= \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+4}\overline{t_{6n+3}})) = \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+4})) + \mathcal{T}(\Sigma_0(t_{6n+3})) = 1/4 + -1/4 = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Dans l'article *Fibonacci snowflakes* à la Section 2.3, nous avons montré que les vecteurs des chemins $\Sigma_0([q_n])$ sont

$$\overrightarrow{\Sigma_0([q_{3n+k}])} = \begin{cases} (P_n, (-1)^n P_n) & \text{si } k = 0, \\ (P_{n+1}, (-1)^n P_n) & \text{si } k = 1, \\ (P_n + P_{n+1}, 0) & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

où P_n est la suite de Pell définie récursivement par

$$P_0 = 0, P_1 = 1; P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad \text{pour } n > 1.$$

et dont les premiers termes sont

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, \dots$$

Remarquons que la suite des nombres de Pell satisfait aussi à l'identité suivante (Bhargava, Kedlaya et Ng, 1999)

$$P_{2n+1} = P_{n+1}^2 + P_n^2. \quad (2.2)$$

Or, on peut montrer que les vecteurs des chemins $\Sigma_0([t_n])$ sont aussi reliés à la même suite de Pell mais de manière quelque peu différente. Dans le lemme suivant, on suppose aussi que $P_{-1} = 1$.

Lemme 2.6. *Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k < 6$, on a*

$$\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+k}])} = \begin{cases} (P_{2n-1} + P_{2n}, 0) & \text{si } k = 0, \\ (P_{2n+1}, -P_{2n}) & \text{si } k = 1, \\ (P_{2n+1}, -P_{2n+1}) & \text{si } k = 2, \\ (0, -P_{2n} - P_{2n+1}) & \text{si } k = 3, \\ (P_{2n+1}, -P_{2n+2}) & \text{si } k = 4, \\ (P_{2n+2}, -P_{2n+2}) & \text{si } k = 5. \end{cases}$$

Démonstration. Par récurrence sur n . Si $n = 0$, le Tableau 2.4 montre que $\overrightarrow{\Sigma_0([t_{0+k}])}$ satisfait l'énoncé pour $0 \leq k < 6$. Supposons que l'énoncé soit vrai pour $n - 1$ et montrons-le pour n . Si $k = 0$, on a que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+0}])} &= \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n-1}t_{6n-2}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n-1}])\Sigma_0([t_{6n-2}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n-1}])} + \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n-2}])} \\ &= (P_{2n}, -P_{2n}) + (P_{2n-1}, +P_{2n}) = (P_{2n} + P_{2n-1}, 0). \end{aligned}$$

Si $k = 1$, on a que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+1}])} &= \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n}t_{6n-1}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n}])\Sigma_3([t_{6n-1}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n}])} + \overrightarrow{\Sigma_3([t_{6n-1}])} \\ &= (P_{2n} + P_{2n-1}, 0) + (P_{2n}, -P_{2n}) = (2 \cdot P_{2n} + P_{2n-1}, -P_{2n}) \\ &= (P_{2n+1}, -P_{2n}). \end{aligned}$$

Si $k = 2$, on a que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+2}])} &= \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+1}t_{6n}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+1}])\Sigma_3([t_{6n}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+1}])} + \overrightarrow{\Sigma_3([t_{6n}])} \\ &= (P_{2n+1}, -P_{2n}) + (0, -P_{2n} - P_{2n-1}) = (P_{2n+1}, -2P_{2n} - P_{2n-1}) \\ &= (P_{2n+1}, -P_{2n+1}).\end{aligned}$$

Si $k = 3$, on a que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+3}])} &= \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+2}t_{6n+1}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+2}])\Sigma_2([t_{6n+1}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+2}])} + \overrightarrow{\Sigma_2([t_{6n+1}])} \\ &= (P_{2n+1}, -P_{2n+1}) + (-P_{2n+1}, -P_{2n}) = (0, -P_{2n+1} - P_{2n}).\end{aligned}$$

Si $k = 4$, on a que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+4}])} &= \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+3}t_{6n+2}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+3}])\Sigma_3([t_{6n+2}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+3}])} + \overrightarrow{\Sigma_3([t_{6n+2}])} \\ &= (0, -P_{2n+1} - P_{2n}) + (P_{2n+1}, -P_{2n+1}) = (P_{2n+1}, -2P_{2n+1} - P_{2n}) \\ &= (P_{2n+1}, -P_{2n+2}).\end{aligned}$$

Si $k = 5$, on a que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+5}])} &= \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+4}t_{6n+3}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+4}])\Sigma_1([t_{6n+3}])} = \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6n+4}])} + \overrightarrow{\Sigma_1([t_{6n+3}])} \\ &= (P_{2n+1}, -P_{2n+2}) + (P_{2n+1} + P_{2n}, 0) = (2P_{2n+1} + P_{2n}, -P_{2n+2}) \\ &= (P_{2n+2}, -P_{2n+2}). \quad \square\end{aligned}$$

Lemme 2.7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathcal{F}$.

- (i) Le chemin $\Sigma_\alpha(t_n)$ est sans croisement;
- (ii) Le chemin $\Sigma_\alpha([t_{3n+1}^4])$ est le mot de contour d'un polyomino 8-connecté.

Démonstration. (i) La démonstration peut être adaptée à partir de celle du chemin $\Sigma_\alpha(q_n)$ faite dans l'article *Fibonacci snowflakes* à la section 2.3. Les plus petites boîtes contenant les chemins $\Sigma_\alpha(t_n)$ suivent la même récurrence.

(ii) Il suffit de montrer que $\Sigma_\alpha([(t_{3n+1})^3])$ ne se croise pas. D'abord, on remarque que $\overline{t_{3n+5}} = \overline{t_{3n+4}t_{3n+3}} = \overline{t_{3n+3}t_{3n+2}\overline{t_{3n+2}t_{3n+1}}} = \overline{t_{3n+2}t_{3n+1}t_{3n+1}t_{3n}\overline{t_{3n+2}t_{3n+1}}}$. Mais t_{3n+1} est un préfixe de $t_{3n}\overline{t_{3n+2}}$, de sorte que t_{3n+1}^3 est un facteur de $\overline{t_{3n+5}}$. De l'énoncé (i), nous concluons que $\Sigma_\alpha([(t_{3n+1})^3])$ ne se croise pas. \square

On définit la *tuile de Fibonacci duale d'ordre n* comme étant le polyomino 8-connexe dont le mot de contour est $\Sigma_\alpha([(t_{3n+1})^4])$. Les six premières sont illustrées à la Figure 2.7 et, pour comparaison, les six premières tuiles de Fibonacci sont à la Figure 2.8. L'utilisation du qualificatif *dual* est justifié par le fait que la tuile de Fibonacci d'ordre n et la tuile de Fibonacci duale d'ordre n sont approximativement obtenues l'une à partir de l'autre par une rotation de 45 degrés suivie d'une homothétie de facteur $\sqrt{2}$ (ou son inverse $1/\sqrt{2}$).

Proposition 2.8. *Les tuiles de Fibonacci duales d'ordre $n > 0$ sont des doubles carrés.*

Démonstration. En vertu du Lemme 2.2, on a que $t_{3n+1} = px$ où p est un σ_0 -palindrome et $x \in \{1, 3\}$ est une lettre. Si $x = 3$, nous considérerons le chemin inverse, i.e. $\sigma_0(\widehat{(t_{3n+1})^4})$, de sorte que nous pouvons supposer que $x = 1$. D'une part, nous avons que

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha([(t_{3n+1})^4]) &= \Sigma_\alpha([p1 \cdot p1 \cdot \sigma_0(\tilde{p})1 \cdot \sigma_0(\tilde{p})1]) \\ &= \Sigma_\alpha(p1 \cdot p1 \cdot \sigma_0(\tilde{p})1 \cdot \sigma_0(\tilde{p})) = \Sigma_\alpha p \cdot \Sigma_{\rho(\alpha)} p \cdot \widehat{\Sigma_\alpha p} \cdot \widehat{\Sigma_{\rho(\alpha)} p},\end{aligned}$$

car $\mathcal{T}(p) = 0$. Et d'autre part, le conjugué $t'_{3n+1} = \overline{t_{3n-1}t_{3n}}$ du mot t_{3n+1} correspond à un autre mot de contour de la même tuile. En vertu du Lemme 2.2, nous pouvons écrire $t_{3n} = r1$ et $t_{3n-1} = q3$, où q et r sont des palindromes. Donc, $p1 = t_{3n+1} = t_{3n}\overline{t_{3n-1}} = r1\overline{q1}$ de sorte que $p = r1\overline{q}$. Mais p est un σ_0 -palindrome, ce qui signifie que $t'_{3n+1} = \overline{t_{3n-1}t_{3n}} = \overline{q1}r1 = \tilde{p}1 = \overline{p}1$. Étant donné que \tilde{p} est aussi un σ_0 -palindrome, nous obtenons la deuxième factorisation

$$\Sigma_\alpha([(t'_{3n+1})^4]) = \Sigma_\alpha(\tilde{p}1 \cdot \overline{p}1 \cdot \tilde{p}1 \cdot \tilde{p}) = \Sigma_\alpha \tilde{p} \cdot \Sigma_{\rho(\alpha)} \tilde{p} \cdot \widehat{\Sigma_\alpha \tilde{p}} \cdot \widehat{\Sigma_{\rho(\alpha)} \tilde{p}}. \quad \square$$

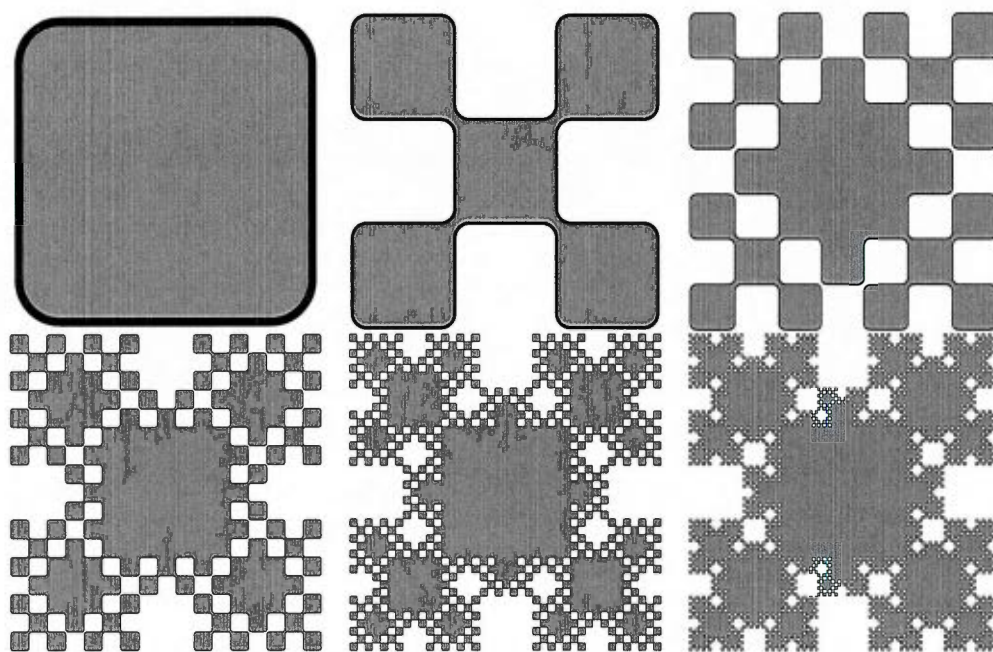


Figure 2.7 Tuiles de Fibonacci duales d'ordre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

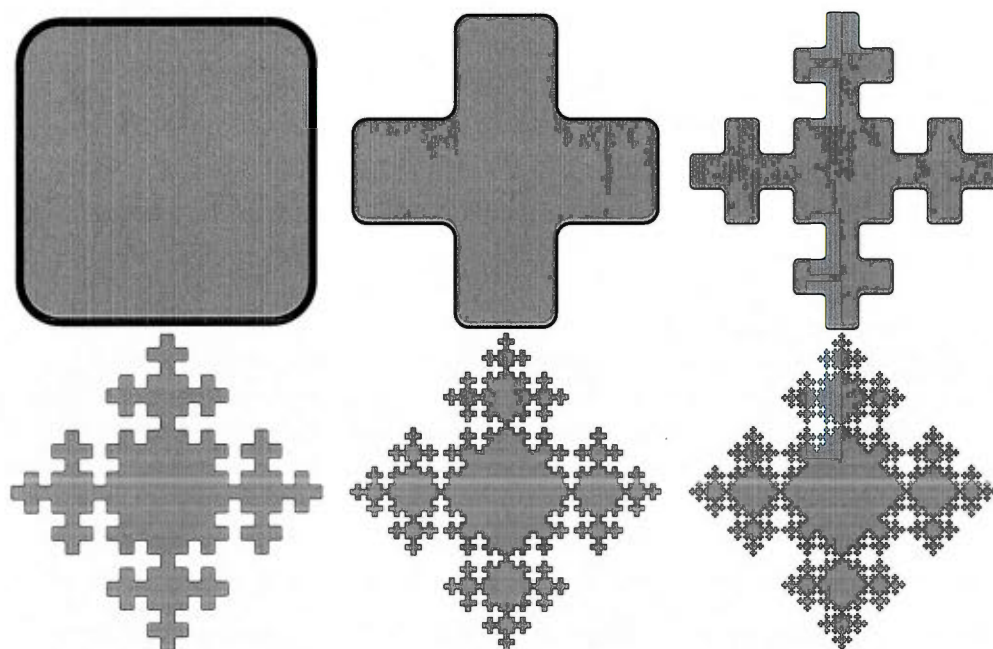


Figure 2.8 Tuiles de Fibonacci d'ordre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Comme on l'observe aux Figures 2.7 et 2.8, la suite des aires des tuiles duales de Fi-

bonacci semble être la même que celle des tuiles de Fibonacci : 1, 5, 29, etc. Cela est illustré en faisant l'expérimentation suivante :

```
sage: [words.fibonacci_tile(i).area() for i in range(7)]
[1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461]
sage: [words.dual_fibonacci_tile(i).area() for i in range(7)]
[1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461]
```

Nous démontrons ce résultat ci-bas. Ce fait est basé sur le Lemme 2.6 qui associe les vecteurs des chemins aux nombres de Pell.

Proposition 2.9. *L'aire de la tuile duale de Fibonacci $\Sigma_\alpha([t_{3n+1}]^4)$ est P_{2n+1} .*

Démonstration. Comme $\Sigma_\alpha([t_{3n+1}]^4)$ est le mot de contour d'une tuile carrée (Théorème 2.8), son aire est égale à celle du parallélogramme déterminé par l'une de ses factorisations. Considérons les deux cas possibles selon la parité de n .

Premier cas : n est pair. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. L'aire du parallélogramme est déterminée par la valeur absolue du déterminant formé par les vecteurs $\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6m+1}])}$ et $\overrightarrow{\Sigma_3([t_{6m+1}])}$:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6m+1}])} \\ \overrightarrow{\Sigma_3([t_{6m+1}])} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{2m+1} & -P_{2m} \\ -P_{2m} & -P_{2m+1} \end{vmatrix} = -P_{2m+1}^2 - P_{2m}^2 = -P_{4m+1} = -P_{2n+1}$$

Donc, l'aire est P_{2n+1} .

Deuxième cas : n est impair. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m + 1$. L'aire du parallélogramme est obtenue avec les vecteurs $\overrightarrow{\Sigma_0([t_{6m+4}])}$ et $\overrightarrow{\Sigma_1([t_{6m+4}])}$:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{\Sigma_0([t_{6m+4}])} \\ \overrightarrow{\Sigma_1([t_{6m+4}])} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{2m+1} & -P_{2m+2} \\ P_{2m+2} & P_{2m+1} \end{vmatrix} = P_{2m+1}^2 + P_{2m+2}^2 = P_{4m+3} = P_{2n+1}$$

Donc, dans les deux cas l'aire est P_{2n+1} . □

Lemme 2.10. *La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{H(n)}$ du ratio entre l'aire de la tuile de Fibonacci duale*

et l'aire de son enveloppe convexe est égale à celui de la tuile de Fibonacci, c'est-à-dire $2 - \sqrt{2}$.

Démonstration. Il est facile de calculer $H(n)$:

$$H(n) = (P_n + P_{n+1})^2$$

On peut alors calculer la limite.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{H(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{(P_n + P_{n+1})^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^2 + P_n^2}{(P_n + P_{n+1})^2} && \text{selon l'équation (2.2),} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_{n+1}}{P_n + P_{n+1}} \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{P_n + P_{n+1}} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{P_n}{P_{n+1}}\right)^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{P_{n+1}}{P_n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + 1 + \sqrt{2}\right)^2} \\ &= 2 - \sqrt{2} \approx 0.585786437626905. \quad \square \end{aligned}$$

En fait, il semblerait que les deux suites de tuiles $\Sigma_\alpha([(q_{3n+1})^4])$ et $\Sigma_\alpha([(t_{3n+1})^4])$ renormalisées définissent exactement la même fractale à une rotation de 45 degrés près. Autrement dit, nous énonçons les deux conjectures suivantes.

Conjecture 2.11. *La dimension fractale de la tuile de Fibonacci duale est égale à celle de la tuile de Fibonacci et à celle de la fractale du mot de Fibonacci de Alexis Monnerot-Dumaine, c'est-à-dire $\frac{\log(2+\sqrt{5})}{\log(1+\sqrt{2})} \approx 1.637938210 \dots$*

Conjecture 2.12. *Les deux fractales définies par la limite lorsque n tend vers l'infini des suites $\Sigma_\alpha([(q_{3n+1})^4])$ et $\Sigma_\alpha([(t_{3n+1})^4])$ renormalisées sont égales à une rotation de 45 degrés près.*

Combinatorial properties of double square tiles*

A. BLONDIN MASSÉ[†], A. GARON, S. LABBÉ

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique,
Université du Québec à Montréal,
C. P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), CANADA H3C 3P8
alexandre.blondin.masse@gmail.com, garon.ariane@gmail.com,
slabqc@gmail.com

Abstract

We study the combinatorial properties and the problem of generating exhaustively double square tiles, i.e. polyominoes yielding two distinct periodic tilings by translated copies such that every polyomino in the tiling is surrounded by exactly four copies. We show in particular that every prime double square tile may be obtained from the unit square by applying successively some invertible operators on double squares. As a consequence, we prove a conjecture of Provençal and Vuillon [17] stating that these polyominoes are invariant under rotation of angle π .

Keywords: Tilings, generation, polyomino, double square tile, palindromes.

1 Introduction

The problem of designing an efficient algorithm for deciding whether a given polygon tiles the plane becomes tractable when restricted to polyominoes, that is, subsets of the square lattice \mathbb{Z}^2 whose boundary is a non-crossing closed path (see [14] for more on tilings and [7] for related problems). Here, we consider tilings obtained by translation of a single polyomino, called *exact* in [19]. Paths are conveniently described by words on the alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$, representing the elementary grid steps $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}$. Beauquier and Nivat [1] characterized exact polyominoes by showing that the boundary word $b(P)$ of such a polyomino satisfies the equation $b(P) = X \cdot Y \cdot Z \cdot \widehat{X} \cdot \widehat{Y} \cdot \widehat{Z}$, where \widehat{W} is the path traveled in the direction opposite to that of W (the paths W and \widehat{W} are said *homologous*). From now on, this condition is referred to as the BN-factorization. In this factorization, one of the variables may be empty, in which case P is called a

*With the support of NSERC (Canada)

[†]Corresponding author.

square, and *hexagon* otherwise. Note that a single polyomino may lead to several distinct tilings of the plane: for instance the $n \times 1$ rectangle does it in $n - 1$ distinct ways as a hexagon (see Figure 1).

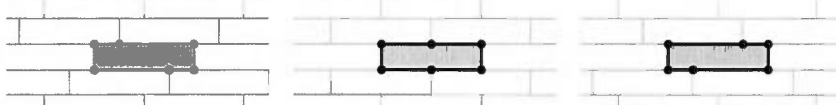


Figure 1: The three hexagonal tilings of the 4×1 rectangle.

However, it was recently established [5] that an exact polyomino tiles the plane as a square in at most two distinct ways. A polyomino having exactly two distinct square tilings is called *double square* [17] and there is a linear time algorithm to find all the square factorizations from its boundary word [11]. Double squares have a peculiar combinatorial structure and motivated developments in equations on words involving periodicities and palindromes [3]. Christoffel and Fibonacci tiles were introduced in [4] as examples of infinite families of double squares (see Figure 2) but do not characterize completely the class of double square tiles (see Figure 3).

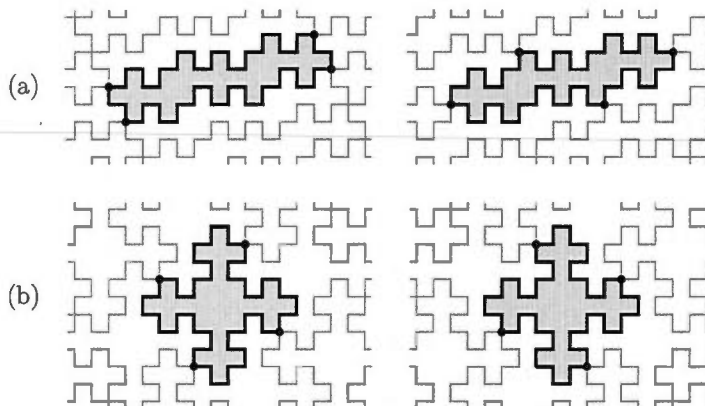


Figure 2: (a) A Christoffel tile yields two distinct non-symmetric square tilings of the plane. (b) The Fibonacci tile of order two with its two symmetric square tilings. Note that both tiles are invariant under a rotation of angle π .

In this article, double square tiles are represented by DS-factorizations: factorization of the boundary into eight parts. We show that any DS-factorization of a double square tile can be reduced to a singular DS-factorization using only two reduction operators (Theorem 24). It appears that these operators are invertible which allows one to generate double square tiles from singular DS-factorizations. Thus, an algorithm for the generation of double square tiles is proposed. Moreover, we prove that every prime double square can be reduced to the unit square by using some reduction operators (Theorem 32). By *prime*, we mean a polyomino that is not obtained from a smaller one by replacing each unit

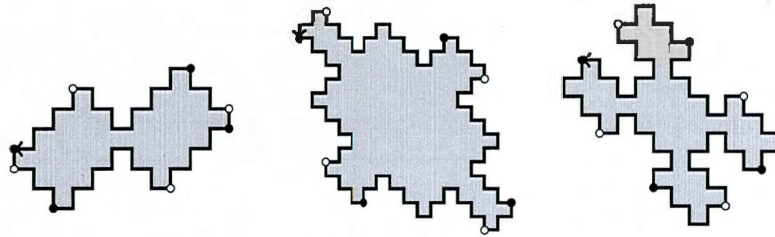


Figure 3: Some double square tiles that are neither Christoffel nor Fibonacci tiles. The two square-factorizations in each case are represented by black and white dots. The boundary of the polyomino is traveled counter-clockwise and ends with the arrow.

cell by another polyomino (see Figure 15, Page 25). This allows to show that the BN-factorizations of prime double squares consist of palindromes, solving positively a conjecture of Provençal and Vuillon [17]:

Theorem 1. *If $AB\hat{A}\hat{B}$ and $XY\hat{X}\hat{Y}$ are the BN-factorizations of a prime double square D , then A , B , X and Y are palindromes or equivalently D is invariant under a rotation ρ^2 of angle π .*

The article is divided as follows. Definitions, notations and some basic results on combinatorics on words and discrete paths are presented in Section 2. The concept of double square factorization is introduced in Section 3 and is followed by many observations and lemmas in preparation of the next sections. Reduction of double squares is considered in Section 4, while generation operators are defined and studied in Section 5, where some algebraic properties are also established. Finally, prime double squares, homologous morphisms and the proof of Theorem 1 may be found in Section 6.

The results presented below were initially observed through computer exploration. Consequently, an implementation in Python of the different operators and algorithms involved will be made available in the open-source software Sage [16].

2 Preliminaries

The usual terminology and notation on words is from Lothaire [15]. An *alphabet* \mathcal{A} is a finite set whose elements are *letters*. A finite word w is a function $w : [1, 2, \dots, n] \rightarrow \mathcal{A}$, where w_i is the i -th letter, $1 \leq i \leq n$. The *length* of w , denoted by $|w|$, is the integer n . The length of the empty word denoted by ε is 0. The *free monoid* \mathcal{A}^* is the set of all finite words over \mathcal{A} . The *reversal* of $w = w_1w_2 \dots w_n$ is the word $\tilde{w} = w_nw_{n-1} \dots w_1$. Given a nonempty word w , let $\text{FST}(w) = w_1$ and $\text{LST}(w) = w_n$ denote respectively the first and last letter of the word w . A word u is a *factor* of another word w if there exist $x, y \in \mathcal{A}^*$ such that $w = xuy$. If $x = \varepsilon$, then u is called *prefix* and if $y = \varepsilon$, it is called a *suffix* of w . Let u be a prefix of some word w . We denote by $u^{-1}w$ the unique

word such that $uu^{-1}w = w$. Roughly speaking, $u^{-1}w$ is the word obtained from w by deleting the prefix u . The notation wu^{-1} is defined similarly for u a suffix of w . We denote by $|w|_u$ the number of occurrences of u in w . Two words u and v are *conjugate*, written $u \equiv v$ or sometimes $u \equiv_{|x|} v$, when x, y are such that $u = xy$ and $v = yx$. Conjugacy is an equivalence relation and the class of a word w is denoted $[w]$.

A *power* of a word u is a word of the form u^k for some integer $k \in \mathbb{N}$. It is convenient to set $u^0 = \varepsilon$ for each word u . When $k > 1$ is an integer we say that u^k is a *proper power* of u . A nonempty word is called *primitive* if it is not a proper power of another word. Let u be a nonempty word; then there exist a unique primitive word z and a unique integer $k \geq 1$ such that $u = z^k$. The word z is called *the primitive root* of u .

Given two alphabets A and B , a *morphism* is a function $\varphi : A^* \rightarrow B^*$ compatible with concatenation, that is, $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ for any $u, v \in A^*$. It is clear that a morphism is completely defined by its action on the letters of A .

In this article, the alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3\}$ is considered as the additive group of integers modulo 4. Basic transformations on \mathcal{F} are rotations $\rho^i : x \mapsto x + i$ and reflections $\sigma_i : x \mapsto i - x$, which extend uniquely to morphisms on \mathcal{F}^* . Another useful morphism, denoted by $\bar{\cdot}$, is the morphism defined by $0 \leftrightarrow 2$ and $1 \leftrightarrow 3$. Given a nonempty word $w \in \mathcal{F}^*$, the *first differences word* $\Delta(w) \in \mathcal{F}^*$ of w is

$$\Delta(w) := (w_2 - w_1) \cdot (w_3 - w_2) \cdots (w_n - w_{n-1}). \quad (1)$$

Given two nonempty word $w, z \in \mathcal{F}^*$, it is convenient to compare the last letter of w with the first letter of z . Hence, we define $\Delta(w, z) \in \mathcal{F}$ as the letter given by

$$\Delta(w, z) := \Delta(\text{LST}(w)\text{FST}(z)) = \Delta(w_n z_1) \quad (2)$$

One may verify that $\Delta(wz) = \Delta(w)\Delta(w, z)\Delta(z)$. Words in \mathcal{F}^* are interpreted as paths in the square grid as usual (See Figure 4), so that we indistinctly talk of any word $w \in \mathcal{F}^*$ as the *path* w .

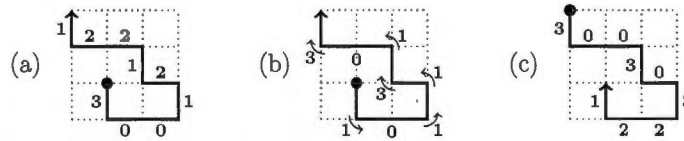


Figure 4: (a) The path $w = 300121221$. (b) Its first differences word $\Delta(w) = 10113103$. (c) Its homologous $\hat{w} = 300303221$.

Moreover, the word $\hat{w} := \rho^2(\bar{w})$ is homologous to w , that is, described in direction opposite to that of w (see Figure 4). A word $u \in \mathcal{F}^*$ may contain factors in $\mathcal{C} = \{02, 20, 13, 31\}$, corresponding to cancelling steps on a path. Nevertheless, each word w can be reduced in a unique way to a word w' , by sequentially applying the rewriting rules in $\{u \mapsto \varepsilon \mid u \in \mathcal{C}\}$. The *reduced word* w' of w is nothing but a word in $\mathcal{P} = \mathcal{F}^* \setminus \mathcal{F}^* \mathcal{C} \mathcal{F}^*$. We define the *turning number*¹

of w by

$$\mathcal{T}(w) = \frac{|\Delta(w')|_1 - |\Delta(w')|_3}{4}, \quad (3)$$

where w' is the reduced word of w . Given two nonempty path w and z , it is practical as for the first difference word to compute the turning number of the word of length 2 consisting of the last letter of w and of the first letter of z . Thus, we define

$$\mathcal{T}(w, z) := \mathcal{T}(\text{LST}(w)\text{FST}(z)) \quad (4)$$

One may verify that $\mathcal{T}(wz) = \mathcal{T}(w) + \mathcal{T}(w, z) + \mathcal{T}(z)$. The turning number also satisfies $\mathcal{T}(w) = -\mathcal{T}(\widehat{w})$ and $\mathcal{T}(w, z) = -\mathcal{T}(\widehat{z}, \widehat{w})$.

A path w is *closed* if it satisfies $|w|_0 = |w|_2$ and $|w|_1 = |w|_3$, and it is *simple* if no proper factor of w is closed. A *boundary word* is a simple and closed path, and a *polyomino* is a subset of \mathbb{Z}^2 contained in some boundary word. It is convenient to represent each closed path w by its conjugacy class $[w]$, also called *circular word*. An adjustment is necessary to the function \mathcal{T} , for we take into account the closing turn. The first differences also noted Δ is defined on any closed path w by setting

$$\Delta([w]) = \begin{cases} [\Delta(w) \cdot \Delta(w, w)] & \text{if } w \text{ is nonempty,} \\ [\varepsilon] & \text{if } w \text{ is empty.} \end{cases} \quad (5)$$

which is also a circular word. By applying the same rewriting rules, a circular word $[w]$ is *circularly-reduced* to a unique word $[w']$. If w is a closed path, then the *turning number*¹ of w is

$$\mathcal{T}([w]) = \frac{|\Delta([w'])|_1 - |\Delta([w'])|_3}{4}. \quad (6)$$

It corresponds to its total curvature divided by 2π . Clearly, the turning number $\mathcal{T}([w])$ of a closed path w belongs to \mathbb{Z} (see [9, 10]). In particular, the Daurat-Nivat relation [12] is rephrased as follows.

Proposition 2. *The turning number of a boundary word w is $\mathcal{T}([w]) = \pm 1$.*

Now, we may define orientation: a boundary word w is *positively oriented* (counterclockwise) if its turning number is $\mathcal{T}([w]) = 1$. In general, if $XY\widehat{X}\widehat{Y}$ is a path (simple or not), its turning number may be computed from its square factorization by the formula

$$\mathcal{T}([XY\widehat{X}\widehat{Y}]) = \mathcal{T}(X, Y) + \mathcal{T}(Y, \widehat{X}) + \mathcal{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) + \mathcal{T}(\widehat{Y}, X). \quad (7)$$

As a consequence, every square tile satisfies the following condition.

Proposition 3. *Let $w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$ be the boundary word of a square, then*

$$\Delta(X, Y) = \Delta(Y, \widehat{X}) = \Delta(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \Delta(\widehat{Y}, X) = \alpha$$

where $\alpha = 1$ if w is positively oriented, $\alpha = 3$ otherwise.

¹In [9, 10], the authors introduced the notion of *winding number* of w which is $4\mathcal{T}(w)$

The following result is easy to check.

Proposition 4. *Let $w \equiv XY\widehat{X}\widehat{Y}$ be an oriented boundary word of a square. Then $\text{FST}(X) = \text{LST}(X)$, $\text{FST}(Y) = \text{LST}(Y)$ and the first letter of X , \widehat{X} , Y , \widehat{Y} are mutually distinct, that is,*

$$\{0, 1, 2, 3\} = \{\text{FST}(X), \text{FST}(\widehat{X}), \text{FST}(Y), \text{FST}(\widehat{Y})\}.$$

3 Double square factorizations

In this section, we introduce the useful notion of double square factorization in order to describe all double squares. Its definition is motivated by the following result stating that the BN-factorizations of a double square must alternate.

Lemma 5. [11, 17] *If the boundary word of an exact polyomino satisfies $AB\widehat{A}\widehat{B} \equiv_d XY\widehat{X}\widehat{Y}$, with $0 \leq d \leq |A|$ and $\{A, B, \widehat{A}, \widehat{B}\} \neq \{X, Y, \widehat{X}, \widehat{Y}\}$, then the factorization must alternate, i.e., $0 < d < |A| < d + |X|$.*

Hence, we must have the situation depicted in Figure 5. Moreover, it is useful

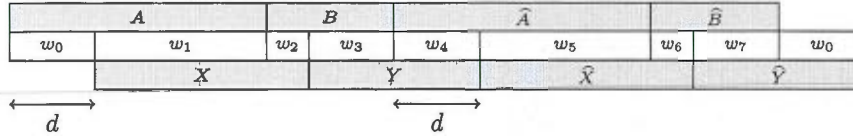


Figure 5: Finer factorization of a double square.

to encode double squares while keeping track of their (two) factorizations. For that purpose, we refine the BN-factorization as follows.

Definition 6. *A double square factorization (DS-factorization for short) is an 8-tuple $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$, $w_i \in \mathcal{F}^*$, such that $|w_i| = |w_{i+4}|$ for $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ and*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \widehat{w_0 w_1} &= w_4 w_5; & \text{(iii)} \quad \widehat{w_2 w_3} &= w_6 w_7; \\ \text{(ii)} \quad \widehat{w_1 w_2} &= w_5 w_6; & \text{(iv)} \quad \widehat{w_3 w_4} &= w_7 w_0. \end{aligned}$$

Its boundary is the word $w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7$.

Observe that every DS-factorization $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ is uniquely determined by the words w_0 , w_1 , w_2 and w_3 . The *length* of a DS-factorization $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ is naturally defined as the length of its boundary $|S| = |w_0 w_1 \dots w_7|$.

Some DS-factorizations play a particular role in the remainder of this article. For this purpose, it is convenient to introduce further definitions. Thus, we say that a DS-factorization S is *degenerate* if there exists i such that w_i is empty; *flat* if there exists i such that $w_i w_{i+1}$ is empty; *singular* if there exists i such that w_{i-1} and w_{i+1} are both empty. A singular DS-factorization is the *unit square* if its boundary word is conjugate to **0123** or **3210**. The choice of these adjectives

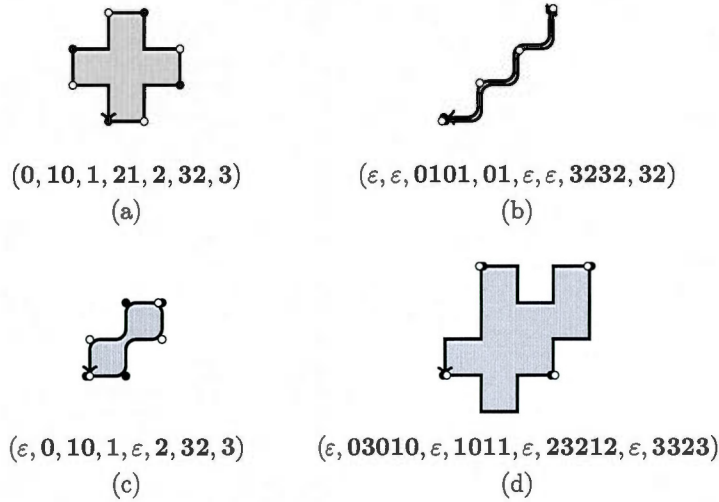


Figure 6: Examples of DS-factorizations. (a) The X pentomino (see [13]) yields the smallest non degenerate DS-factorization. (b) A flat DS-factorization whose corresponding circular path reduces to $[\varepsilon]$. (c) A degenerate DS-factorization: two pairs of black and white dot are the same. (d) A singular DS-factorization: the black and white dots coincide pairwise.

are justified by the following remarks: if S is degenerate, the eight points of the two BN-factorizations partially coincide; if S is flat, then its boundary is of the form $X\bar{X}$; if S is singular, then both square factorizations correspond to the same one. Of course, if S is singular or flat it is also degenerate. The different cases are illustrated in Figure 6.

Example 7. Clearly, each double square yields a non singular DS-factorization. Indeed, consider the double square given in Figure 7: the black and white dots together with the ending arrow uniquely determine the DS-factorization

$$(3, 03010303, 01030, 10103010, 1, 21232121, 23212, 32321232).$$

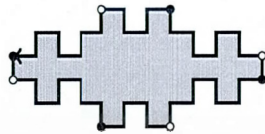


Figure 7: A double square and its DS-factorization. The black and white dots distinguish the two BN-factorizations.

In what follows we exhibit the properties satisfied by DS-factorizations. To fix the notation, hereafter $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ denotes a DS-factorization, and all

indices are taken in \mathbb{Z}_8 . The first result concerns periodicity. Let

$$d_i = |w_{i-1}| + |w_{i+1}|. \quad (8)$$

Observe that if S is non singular, then $d_i \neq 0$ for all $i \in \mathbb{Z}_8$. Moreover, $d_i = d_{i+2}$, since $|w_i| = |w_{i+4}|$.

Lemma 8. *Let S be a DS-factorization and $i \in \mathbb{Z}_8$ such that $d_i \neq 0$. Then the following properties hold:*

- (i) *There exist unique words u_i and v_i and a unique non negative integer n_i such that*

$$\widehat{w_{i-3}w_{i-1}} = u_i v_i \quad (9)$$

$$w_i = (u_i v_i)^{n_i} u_i \quad (10)$$

$$w_{i+1} \widehat{w_{i+3}} = v_i u_i, \quad (11)$$

where $0 \leq |u_i| < d_i$ and $0 < |v_i| \leq d_i$;

- (ii) d_i is a period of w_i ;

- (iii) $n_i = n_{i+4}$, $|u_i| = |u_{i+4}|$ and $|v_i| = |v_{i+4}|$.

The proof of this lemma relies on the following well-known fact:

Proposition 9. [15] *Let x, z be two nonempty words and y be a word such that $xy = yz$. Then there exist unique words u, v and a unique integer $i \geq 0$ such that $x = uv$, $y = (uv)^i u$ and $z = vu$.*

Proof of Lemma 8. (i) It follows from the definition of DS-factorization that

$$\widehat{w_{i-3}w_{i-1}w_i} = \widehat{w_{i-3}w_{i+4}w_{i+3}} = \widehat{w_{i+5}w_{i+4}w_{i+3}} = w_i w_{i+1} \widehat{w_{i+3}}.$$

The two extreme members of this sequence of equalities satisfy an equation of the form $xy = yz$, with $x = \widehat{w_{i-3}w_{i-1}} \neq \varepsilon$, $y = w_i$ and $z = w_{i+1} \widehat{w_{i+3}} \neq \varepsilon$. By Proposition 9, the three equalities follow.

(ii) Since $d_i = |w_{i+1}| + |w_{i+3}| = |u_i| + |v_i|$ and $w_i = (u_i v_i)^{n_i} u_i$, we conclude that d_i is a period of w_i .

(iii) Note that n_i and $|u_i|$ are respectively the quotient and the remainder of $|w_i|$ by $d_i \neq 0$. Since $|w_i| = |w_{i+4}|$ and $d_i = d_{i+2} = d_{i+4}$, we conclude that $n_i = n_{i+4}$ and $|u_i| = |u_{i+4}|$. Finally $|v_i| = d_i - |u_i| = d_{i+4} - |u_{i+4}| = |v_{i+4}|$. \square

For the remainder of this article, we shall use the variables d_i , n_i , u_i and v_i to designate the numbers and words with the same label as in Lemma 8. For example, values of those variables for the double square defined in Example 7 are in the Table 1 and are illustrated in Figure 8. Moreover, a direct consequence of Lemma 8 is that the period d_i extends beyond w_i .

Lemma 10. *If $d_i \neq 0$, then d_i is a period of $w_{i-1}w_iw_{i+1}$ for all $i \in \mathbb{Z}_8$.*

i	w_i	u_i	v_i	$ w_i $	d_i	n_i
0	3	3	030103032321232	1	16	0
1	03010303	03	0103	8	6	1
2	01030	01030	10103010303	5	16	0
3	10103010	10	1030	8	6	1
4	1	1	212321210103010	1	16	0
5	21232121	21	2321	8	6	1
6	23212	23212	32321232121	5	16	0
7	32321232	32	3212	8	6	1

Table 1: Values of the variables for Example 7.

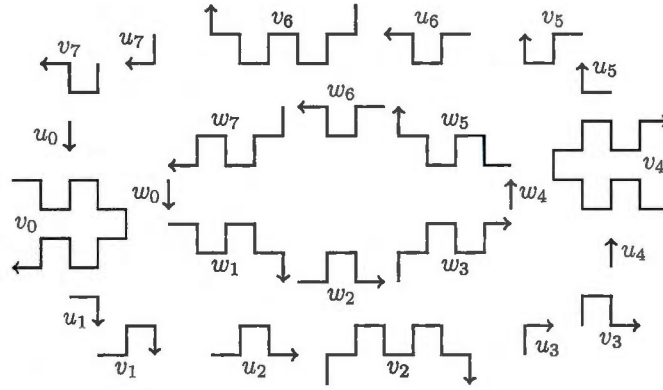


Figure 8: The paths w_i , u_i and v_i for each $i \in \mathbb{Z}_8$ for Example 7.

Proof. Since $d_i = |u_i v_i|$ is a period of

$$(u_i v_i)^{n_i+2} = \widehat{w_{i-3} w_{i-1}} \cdot w_i \cdot w_{i+1} \widehat{w_{i+3}},$$

it is also a period of $w_{i-1} w_i w_{i+1}$. \square

The numbers n_i correspond to the number of repetitions of the patterns according to the period d_i in the words w_i . Some natural constraints apply to them.

Lemma 11. *Assume that S is non singular and $n_i \neq 0$ for some $i \in \mathbb{Z}_8$. Then $n_{i+1} = n_{i+3} = n_{i+5} = n_{i+7} = 0$.*

Proof. We proceed by contradiction, i.e. we assume that there exists some $i \in \mathbb{Z}_8$ such that $n_i, n_{i+1} \neq 0$. Then $|w_i| \geq |w_{i-1}| + |w_{i+1}|$ and $|w_{i+1}| \geq |w_i| + |w_{i+2}|$. Therefore,

$$|w_i| \geq |w_{i-1}| + |w_{i+1}| \geq |w_{i-1}| + |w_i| + |w_{i+2}| > |w_i|, \quad (12)$$

since $|w_{i-1}| = |w_{i+3}|$ and $|w_{i+2}|$ cannot both be zero, S being non singular. The Inequalities (12) yield $|w_i| > |w_i|$, which is absurd. Similarly, it can be shown that $n_{i-1} = 0$ and, using the identity $n_i = n_{i+4}$, the result follows. \square

The following commuting properties of the words u_i , v_i and w_i that prove useful in the next sections are also verified.

Lemma 12. *If $d_i \neq 0$, the following equalities hold:*

$$u_i v_i \cdot w_i = w_i \cdot v_i u_i, \quad (13)$$

$$w_{i-1} \cdot u_i v_i = \widehat{u_{i+4} v_{i+4}} \cdot w_{i-1}, \quad (14)$$

$$v_i u_i \cdot w_{i+1} = w_{i+1} \cdot \widehat{v_{i+4} u_{i+4}}. \quad (15)$$

Proof. Equation (13) is an immediate consequence of Equation 10. We prove the two remaining equations by Lemma 8 applied to indices i and $i+4$:

$$\begin{aligned} w_{i-1} u_i v_i &= w_{i-1} \widehat{w_{i-3} w_{i-1}} = \widehat{u_{i+4} v_{i+4}} w_{i-1}, \\ v_i u_i w_{i+1} &= w_{i+1} \widehat{w_{i+3} w_{i+1}} = w_{i+1} \widehat{v_{i+4} u_{i+4}}. \quad \square \end{aligned}$$

Another list of relations between the words u_i , v_i and w_i are necessary to show that some operations on double square tiles are well-defined.

Lemma 13. *If $d_i \neq 0$, the following properties hold*

$$w_{i-1} u_i = \widehat{u_{i+4} w_{i+3}}, \quad (16)$$

$$u_i w_{i+1} = \widehat{w_{i+5} u_{i+4}}, \quad (17)$$

$$w_{i+1} v_{i+4} = v_i \widehat{w_{i+5}}, \quad (18)$$

$$\widehat{v_i} w_{i+3} = \widehat{w_{i+7} v_{i+4}}. \quad (19)$$

Proof. The results follow from the decomposition in Lemma 8. We obtain (16) and (18) by comparing the suffixes and prefixes of the following equality

$$w_{i+1} \widehat{v_{i+4}} \cdot \widehat{u_{i+4} w_{i+3}} = w_{i+1} \widehat{w_{i+3} w_{i+1}} \widehat{w_{i+3}} = v_i u_i v_i u_i = v_i \widehat{w_{i-3}} \cdot w_{i-1} u_i.$$

We obtain (17) and (19) similarly from

$$\widehat{w_{i-3} u_{i+4}} \cdot \widehat{v_{i+4} w_{i-1}} = \widehat{w_{i-3} w_{i-1}} \widehat{w_{i-3} w_{i-1}} = u_i v_i u_i v_i = u_i w_{i+1} \cdot \widehat{w_{i+3} v_i}. \quad \square$$

Before stating and proving Lemma 15, a technical observation is needed.

Lemma 14. *Let A, B, w be any words and $k > 0$ be an integer. If $A^k w = w B^k$, then $A w = w B$.*

Proof. First we remark that $|A| = |B|$. If A and B are empty, the result is obvious. Suppose $|A| = |B| > 0$. By induction, if $A^k w = w B^k$, then $A^{kn} w = w B^{kn}$ for all positive integer n . Let n be an integer such that $|A^{kn-1}| > |w|$. Then w is a prefix of A^{kn-1} and $A w$ is a prefix of A^{kn} , so that $A w$ is a prefix of $A^{kn} w = w B^{kn}$. Hence, $A w = w B$. \square

The next lemma deals with DS-factorization presenting strong periodic properties.

Lemma 15. Assume that $d_i \neq 0$ divides $|w_i|$ and $w_{i+2} \neq \varepsilon$. Then

- (i) u_i and u_{i+4} are empty and $n_i = n_{i+4} = |w_i|/d_i$,
- (ii) $w_{i+1} = \widehat{w_{i+5}}$, $w_{i+3} = \widehat{w_{i+7}}$, $w_i = (w_{i+1}w_{i-1})^{n_i}$ and $w_{i+4} = (w_{i+5}w_{i+3})^{n_{i+4}}$,
- (iii) there exist two nonempty primitive words $p, q \in \mathcal{F}^*$ and integers $k \geq 2$ and $\ell \geq 1$ such that

$$w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} = p^k \quad \text{and} \quad w_{i+6} = \widehat{p}^\ell,$$

$$w_{i+5}w_{i+6}w_{i+7} = q^k \quad \text{and} \quad w_{i+2} = \widehat{q}^\ell$$

where $|p| = |q|$ divides $g = \gcd(|w_{i+2}|, d_{i+2})$,

- (iv) p and \widehat{q} are conjugate: $pw_{i+1} = w_{i+1}\widehat{q}$ and $\widehat{q}w_{i+3} = w_{i+3}p$,
- (v) the boundary word of S is not simple.

Proof. (i) From Lemma 8, u_i is empty because its length is equal to the remainder of the division of $|w_i|$ by d_i . Also the quotient is n_i .

(ii) From Lemma 8, we have that

$$\widehat{w_{i-3}w_{i-1}} = u_i v_i = \varepsilon \cdot v_i = v_i \cdot \varepsilon = v_i u_i = w_{i+1} \widehat{w_{i+3}}.$$

Then $w_{i+1} = \widehat{w_{i-3}} = \widehat{w_{i+5}}$ and $w_{i+3} = \widehat{w_{i-1}} = \widehat{w_{i+7}}$. Also,

$$w_i = (u_i v_i)^{n_i} u_i = (u_i v_i)^{n_i} = (\widehat{w_{i-3}w_{i-1}})^{n_i} = (w_{i+1}w_{i-1})^{n_i},$$

$$w_{i+4} = (u_{i+4} v_{i+4})^{n_{i+4}} u_{i+4} = (u_{i+4} v_{i+4})^{n_{i+4}} = (\widehat{w_{i+1}w_{i+3}})^{n_{i+4}} = (w_{i+5}w_{i+3})^{n_{i+4}}.$$

(iii) Using assertion (ii) and Definition 6, we can write

$$w_{i+1}w_{i+3}\widehat{w_{i+6}} = w_{i+1}\widehat{w_{i+7}w_{i+6}} = w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} = \widehat{w_{i+6}w_{i+5}w_{i+3}} = \widehat{w_{i+6}w_{i+1}w_{i+3}}.$$

Since this equation has the form $ab = ba$, with $a = w_{i+1}w_{i+3} \neq \varepsilon$ and $b = \widehat{w_{i+6}} \neq \varepsilon$, we have from Lothaire [15] that there exists $P \in \mathcal{F}^*$ such that

$$a = w_{i+1}w_{i+3} = P^{k_1} \quad \text{and} \quad b = \widehat{w_{i+6}} = P^{k_2}$$

with $|P| = \gcd(|b|, |a|) = g$. In particular, $w_{i+6} = \widehat{P}^{k_2}$ and $w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} = P^{k_1+k_2}$. Let p be the primitive root of P , i.e. the smallest word p such that $P = p^n$ with $n \in \mathbb{N}$. We have that $w_{i+1}w_{i+2}w_{i+3} = p^{n(k_1+k_2)} = p^k$ and $w_{i+6} = \widehat{p}^{nk_2} = \widehat{p}^\ell$, where $k \geq 2$ and $\ell \geq 1$ are integers. The word $w_{i+5}w_{i+6}w_{i+7}$ is a conjugate of

$$w_{i+6}w_{i+7}w_{i+5} = w_{i+6}w_{i+7}\widehat{w_{i+1}} = \widehat{w_{i+3}w_{i+2}w_{i+1}} = \widehat{w_{i+3}w_{i+2}w_{i+1}} = \widehat{p}^k.$$

Then there is a primitive word $q \in \mathcal{F}^*$ conjugate of \widehat{p} such that $w_{i+5}w_{i+6}w_{i+7} = q^k$. Moreover $q^k = w_{i+5}w_{i+6}w_{i+7} = \widehat{w_{i+2}w_{i+1}w_{i+7}}$ so that $\widehat{w_{i+2}} = q^\ell$ because

$|q| = |p|$ divides $|w_{i+2}| = |w_{i+6}|$.
(iv) We have

$$\begin{aligned} p^\ell w_{i+1} &= \widehat{w_{i+6} w_{i+1}} = \widehat{w_{i+6} w_{i+5}} = w_{i+1} w_{i+2} = w_{i+1} \widehat{q}^\ell, \\ w_{i+3} p^\ell &= w_{i+3} \widehat{w_{i+6}} = \widehat{w_{i+7} w_{i+6}} = w_{i+2} w_{i+3} = \widehat{q}^\ell w_{i+3}. \end{aligned}$$

From Lemma 14, we conclude that $pw_{i+1} = w_{i+1}\widehat{q}$ and $\widehat{q}w_{i+3} = w_{i+3}p$.

(v) Without loss of generality, assume that $i = 0$. Since p and \widehat{q} are conjugate, it follows that pq and qp are closed paths. Hence, it suffices to show that pq or qp is a proper factor of the boundary word of S . From (ii) and (iii), we know that the boundary word $w = w_0 w_1 \cdots w_7$ of S is

$$w = w_0 p^k w_4 q^k = (w_1 \widehat{w_3})^{n_0} p^k (\widehat{w_1} w_3)^{n_4} q^k.$$

If $n_0 = n_4 = 0$, then $w = p^k q^k$ so that pq and qp both occur in $[w]$. Otherwise, assume that $n_0, n_4 \geq 1$. Since $|p| = |q|$ divides $d_2 = |w_1| + |w_3|$, then either $|p| \leq |w_1|$ or $|p| \leq |w_3|$. If $|p| \leq |w_1|$, then p is a prefix of w_1 . Therefore w ends with q and starts with p so that qp occurs in $[w]$. Similarly, if $|p| \leq |w_3|$, then p is a suffix of w_3 . Thus w ends with $p q^k$ so that pq occurs in $[w]$. \square

Example 16. If $(|w_0|, |w_1|, |w_2|, |w_3|) = (5, 4, 3, 8)$, a double square factorization might be of the following form:

i	w_i	u_i	v_i	$ w_i $	d_i	n_i
0	32323	32323	2323010	5	12	0
1	2323	2323	2323	4	8	0
2	232	232	101012323	3	12	0
3	10101232		10101232	8	8	1
4	10101	10101	0101232	5	12	0
5	0101	0101	0101	4	8	0
6	010	010	323230101	3	12	0
7	32323010		32323010	8	8	1

Here, we have that $d_3 = 8$ divides $|w_3| = 8$. In this case, Lemma 15 applies and we must have that u_3 is empty, $n_3 = 1$, $w_4 = \widehat{w_0}$, $w_6 = \widehat{w_2}$, $w_3 = w_4 w_2$ and $w_7 = w_0 w_6$. Moreover, there exist two primitive words $p = \mathbf{10}$ and $q = \mathbf{32}$ and integers $k = 6$ and $\ell = 2$ such that

$$w_4 w_5 w_6 = p^k = (\mathbf{10})^6 \quad \text{and} \quad w_1 = \widehat{p}^\ell = (\widehat{\mathbf{10}})^2,$$

$$w_0 w_1 w_2 = q^k = (\mathbf{32})^6 \quad \text{and} \quad w_5 = \widehat{q}^\ell = (\widehat{\mathbf{32}})^2$$

where $|p| = |q| = 2$ divides $g = \gcd(|w_5|, d_5) = \gcd(4, 8) = 4$. Observe that $|p| \neq g$. Also, $p = \mathbf{10}$ and $\widehat{q} = \mathbf{01}$ are conjugates:

$$pw_4 = \mathbf{10} \cdot \mathbf{10101} = \mathbf{10101} \cdot \mathbf{01} = w_4 \widehat{q},$$

$$\widehat{q}w_6 = \mathbf{01} \cdot \mathbf{010} = \mathbf{010} \cdot \mathbf{10} = w_6 p.$$

Finally, we verify that $pq = \mathbf{1032}$ and $qp = \mathbf{3210}$ are closed proper factors of the boundary word.

The turning number of a DS-factorization $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ is naturally defined from the circular word it defines: $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}([w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7])$. Whenever S is non singular, its turning number can be computed from both its square factorizations using Equation (7):

$$\mathcal{T}(S) = \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(w_{i-2} w_{i-1}, w_i w_{i+1}) = \sum_{i \in \{1,3,5,7\}} \mathcal{T}(w_{i-2} w_{i-1}, w_i w_{i+1}) \quad (20)$$

These formulas are used in Lemma 22. Proposition 4 translates directly as follows for DS-factorizations.

Lemma 17. *If S is non singular and $\mathcal{T}(S) = \pm 1$ then $\text{FST}(w_i w_{i+1}) = \text{LST}(w_i w_{i+1})$ for all i .*

Proof. It is a direct consequence of Proposition 4. \square

Under some conditions, we may guarantee that some DS-factorizations do not yield double squares. More precisely:

Lemma 18. *Assume that S is non degenerate. If there exists $i \in \mathbb{Z}_8$ such that $d_i = d_{i+1}$, then $\mathcal{T}(S) \notin \{-1, 1\}$.*

Proof. Let $d = |w_i| + |w_{i+2}| = |w_{i+1}| + |w_{i+3}|$. We first show that there exists $j \in \mathbb{Z}_8$ such that $|w_{j-1} w_j| \geq d$ and $|w_j w_{j+1}| \geq d$. Arguing by contradiction, assume that the contrary holds. Then for all $j \in \mathbb{Z}_8$ either $|w_{j-1} w_j| < d$ or $|w_j w_{j+1}| < d$. By the pigeonhole principle, there must exist $k \in \mathbb{Z}_8$ with $|w_k| + |w_{k+1}| < d$ and $|w_{k+2}| + |w_{k+3}| < d$. Thus,

$$2d = |w_k| + |w_{k+1}| + |w_{k+2}| + |w_{k+3}| < 2d,$$

which is absurd. Now, we know from Lemma 10 that the words $x = w_{j-2} w_{j-1} w_j$, $y = w_{j-1} w_j w_{j+1}$ and $z = w_j w_{j+1} w_{j+2}$ all have period d . Moreover, x has a suffix of length at least d that is a prefix of y , and y has a suffix of length at least d that is a prefix of z , so that the period d propagates on the whole word $w_{j-2} w_{j-1} w_j w_{j+1} w_{j+2}$. First, since $|w_{j-2} w_{j-1} w_j w_{j+1}| = 2d$, we have $\text{FST}(w_{j-2}) = \text{FST}(w_{j+2})$. On the other hand, $w_{j+2} w_{j+3} = \widehat{w_{j-1} w_j w_{j+1}}$ implies $\text{FST}(w_{j+2}) = \overline{\text{LST}(w_{j-1})}$. To conclude, we proceed again by contradiction. Assume that $\mathcal{T}(S) \in \{-1, 1\}$. Then Lemma 17 applies. In particular, $\text{LST}(w_{j-1}) = \text{FST}(w_{j-2})$. Gathering these three equalities, we obtain

$$\text{FST}(w_{j-2}) = \text{FST}(w_{j+2}) = \overline{\text{LST}(w_{j-1})} = \overline{\text{FST}(w_{j-2})},$$

which is impossible. Hence, $\mathcal{T}(S) \notin \{-1, 1\}$. \square

It is worth mentioning that Lemma 18 is false if one of the w_i is empty. For instance, the double square $S = (\mathbf{3}, \varepsilon, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{1}, \varepsilon, \mathbf{2}, \mathbf{32})$ is such that $d_1 = d_2$ but its turning number is 1.

Lemma 19. *Let S be a DS-factorization. If S is flat, then $\mathcal{T}(S) = 0$.*

Proof. There exists $i \in \mathbb{Z}_8$ such that $w_i w_{i+1} = \varepsilon$. Then

$$\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}([w_{i+2} w_{i+3} \widehat{w_{i+2} w_{i+3}}]) = \mathcal{T}([\varepsilon]) = 0. \quad \square$$

4 Reduction of double squares

To describe the structure of double squares, we consider functions acting on the set of DS-factorizations. The goal of this section is to show that any DS-factorization can be reduced to a singular DS-factorization with simple operators. The first two functions act on non singular DS-factorizations. It is worth mentioning they are both invertible under mild conditions described in Section 5 and preserve remarkable topological properties studied in Section 6. Below, we describe them and show their action on double squares.

Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a non singular DS-factorization. Recall that Lemma 8 applies, so that the words u_i , v_i and the integers n_i as discussed in the previous section may be uniquely determined from S . Hence, if $|w_0| \geq d_0$, we define

$$\text{SHRINK}(S) = (w_0(v_0u_0)^{-1}, w_1, w_2, w_3, w_4(v_4u_4)^{-1}, w_5, w_6, w_7).$$

Moreover, for any non singular DS-factorization S , let

$$\text{SWAP}(S) = (\widehat{w_4}, (v_1u_1)^{n_1}v_1, \widehat{w_6}, (v_3u_3)^{n_3}v_3, \widehat{w_0}, (v_5u_5)^{n_5}v_5, \widehat{w_2}, (v_7u_7)^{n_7}v_7).$$

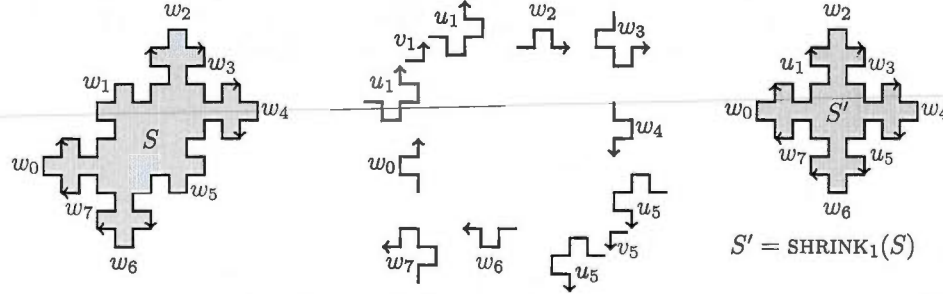


Figure 9: $S' = \text{SHRINK}_1(S)$ is obtained from S by removing one period to w_1 and w_5 .

The basic operators SHRINK, and SWAP are generalized to act on any w_i by using a shift operator. Let SHIFT be the operator defined by

$$\text{SHIFT}(S) = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_0).$$

It is obvious that $\text{SHIFT}(S)$ is a DS-factorization. Therefore for each $i \in \mathbb{Z}_8$ and every $\Theta \in \{\text{SWAP}, \text{SHRINK}\}$, we define the operator $\Theta_i(S)$ as

$$\Theta_i(S) = \text{SHIFT}^{-i} \circ \Theta \circ \text{SHIFT}^i(S).$$

The reason for shifting back is simply to keep fixed the positions of other factors. In particular, $\Theta_0(S) = \Theta(S)$. The effects of these operators are illustrated in Figures 9 and 10. Their inverse are detailed in the next section. We first prove that SHRINK_i and SWAP_i yield DS-factorizations.

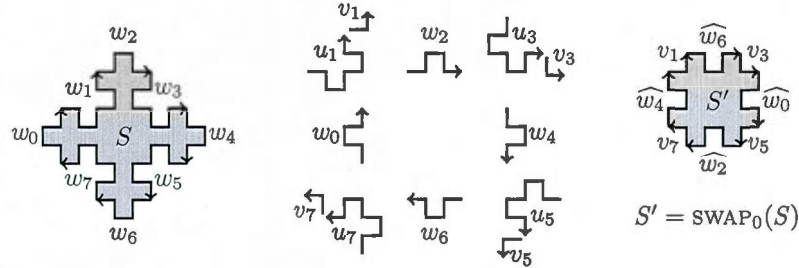


Figure 10: For $S' = \text{SWAP}_0(S)$, w_0 and w_4 as well as w_2 and w_6 are interverted and reversed. Moreover $w_1 = u_1$, $w_3 = u_3$, $w_5 = u_5$ and $w_7 = u_7$ are respectively replaced by v_1 , v_3 , v_5 and v_7 .

Proposition 20. Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a non singular DS-factorization. The following properties hold.

- (i) $\text{SWAP}_i(S)$ is a non singular DS-factorization.
- (ii) If $|w_i| \geq d_i$, then $\text{SHRINK}_i(S)$ is a DS-factorization.

Proof. Notice that S non singular implies that Lemma 8 applies for any index in \mathbb{Z}_8 . Without loss of generality, we prove it for $i = 0$.

(i) Let $(w'_i)_{i \in \mathbb{Z}_8} = \text{SWAP}_0(S)$. It suffices to verify the equations in Definition 6. First we show that $w'_0 w'_1 = \widehat{w'_4 w'_5}$. We know from Equation (14) that $\widehat{w_4 v_1 u_1} = \widehat{v_5 u_5 w_4}$ and from Equation (19) that $\widehat{w_4 v_1} = \widehat{v_5 w_0}$. Hence

$$w'_0 w'_1 = \widehat{w_4 (v_1 u_1)^{n_1}} v_1 = (\widehat{v_5 u_5})^{n_1} \widehat{w_4 v_1} = (\widehat{v_5 u_5})^{n_1} \widehat{v_5 w_0} = \widehat{w'_4 w'_5}.$$

Now we show that $w'_1 w'_2 = \widehat{w'_5 w'_6}$. We know from Equation (15) that $u_1 v_1 \widehat{w_6} = \widehat{w_6 u_5 v_5}$ and from Equation (18) that $v_1 \widehat{w_6} = w_2 \widehat{v_5}$. Hence,

$$w'_1 w'_2 = v_1 (u_1 v_1)^{n_1} \widehat{w_6} = v_1 \widehat{w_6} (\widehat{u_5 v_5})^{n_1} = w_2 \widehat{v_5} (\widehat{u_5 v_5})^{n_1} = \widehat{w'_5 w'_6}.$$

The proof for $w'_2 w'_3 = \widehat{w'_6 w'_7}$ and $w'_3 w'_4 = \widehat{w'_7 w'_0}$ are done as above. Then $\text{SWAP}_0(S)$ satisfy the hypothesis to be a DS-factorization. Finally, we observe that d'_1 is preserved by SWAP_0 and

$$d'_0 = (|w_1| - |u_1|) + |v_1| + (|w_3| - |u_3|) + |v_3| \geq 0 + |v_1| + 0 + |v_3| > 0.$$

Thus $\text{SWAP}_0(S)$ is non singular.

(ii) Remark that $n_0 = n_4 \geq 1$ since $|w_0| \geq d_0$. Let $w'_0 = (u_0 v_0)^{n_0-1} u_0$ and $w'_4 = (u_4 v_4)^{n_4-1} u_4$. We want to show that

$$\text{SHRINK}(S) = (w'_0, w_1, w_2, w_3, w'_4, w_5, w_6, w_7)$$

is a DS-factorization. We know from Equation (14) that $w_7 u_0 v_0 = \widehat{u_4 v_4 w_7}$. Then we can write

$$\widehat{u_4 v_4 w_7 w'_0} = w_7 u_0 v_0 w'_0 = w_7 w_0 = \widehat{w_4 w_3} = \widehat{u_4 v_4 w'_4 w_3}$$

and $w_7 w'_0 = \widehat{w_3 w'_4}$. The proof that $w'_0 w_1 = \widehat{w'_4 w_5}$ is about the same, using the equalities $v_0 u_0 w_1 = w_1 \widehat{v_4 u_4}$ (Equation (18)). Hence, $\text{SHRINK}(S)$ is a DS-factorization. \square

As we know from Lemma 10, there exists a local periodicity in the neighborhood of w_i . The effect of the operator SHRINK may be interpreted as removing one instance of the repeat pattern, as illustrated in Figure 9. The operator SWAP is defined from the relations between the w_i 's and the periods $u_j v_j$ (Lemma 13). An example is in Figure 10. Both SHRINK and SWAP are invertible (see Section 5 for the definition of the inverses).

It is not hard to verify that SHRINK produces smaller DS-factorizations whenever it is applicable. However, the operator SWAP might increase the size of the tile depending on the lengths of the words u_i and v_i . These facts are detailed in the following lemma.

Lemma 21. *Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a non singular DS-factorization such that $\mathcal{T}(S) = \pm 1$. The following properties hold.*

- (i) *If $|w_i| \geq d_i$ for some i , then $|\text{SHRINK}_i(S)| < |S|$.*
- (ii) *If $0 < |w_i| < d_i$ for all i , then there exists i such that $|\text{SWAP}_i(S)| < |S|$.*
- (iii) *If there exists i such that $|w_i| = 0$ and $0 < |w_j| < d_j$ for all $j \notin \{i, i+4\}$, then $|\text{SWAP}_i(S)| < |S|$.*

Proof. (i) Follows directly from the definition of SHRINK_i .

(ii) We have that $w_i = u_i$. Suppose by contradiction that $\text{SWAP}_i(S)$ does not reduce S for all i . Then $|u_{i+1}| + |u_{i+3}| \leq |v_{i+1}| + |v_{i+3}|$ for all i . Using Equation (10), we have $|v_i| = |w_{i+3}| + |w_{i+1}| - |u_i|$, this implies $|u_i| + |u_{i+2}| \leq |u_{i+1}| + |u_{i+3}|$ for all $i \in \mathbb{Z}_8$. Then we deduce that $|u_0| + |u_2| = |u_1| + |u_3|$. But Lemma 18 implies $\mathcal{T}(S) \neq \pm 1$ which is a contradiction.

(iii) Since $|w_i| = 0$, we have $d_{i+1} = |w_{i+2}|$. Also, the hypothesis implies that

$$\begin{array}{ll} w_{i+1} = u_{i+1} & |v_{i+1}| = d_{i+1} - |u_{i+1}| \\ w_{i+2} = u_{i+2} & \text{and } |v_{i+2}| = d_{i+2} - |u_{i+2}| \\ w_{i+3} = u_{i+3} & |v_{i+3}| = d_{i+3} - |u_{i+3}| \end{array}$$

If $|\text{SWAP}_i(S)| \geq |S|$, then

$$|u_{i+1}| + |u_{i+3}| \leq |v_{i+1}| + |v_{i+3}| = (d_{i+1} - |u_{i+1}|) + (d_{i+3} - |u_{i+3}|).$$

This implies that $2|u_{i+1}| + 2|u_{i+3}| \leq d_{i+1} + d_{i+3} = 2d_{i+1}$ which leads to $d_{i+2} = |w_{i+1}| + |w_{i+3}| = |u_{i+1}| + |u_{i+3}| \leq d_{i+1} = |w_{i+2}|$, a contradiction. \square

A remarkable property of the reduction operators is that they all preserve the turning number, at least in absolute value. For example, the reader may check that

$$\text{SWAP}_1(3, \varepsilon, 0, 10, 1, \varepsilon, 2, 32) = (2, \varepsilon, 1, 01, 0, \varepsilon, 3, 23)$$

but $\mathcal{T}([30101232]) = 1$ and $\mathcal{T}([21010323]) = -1$.

Lemma 22. Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a DS-factorization.

- (i) If $\text{SHRINK}_i(S)$ is flat, then $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\text{SHRINK}_i(S)) = 0$.
- (ii) We have $\mathcal{T}(\text{SHRINK}_i(S)) = \mathcal{T}(S)$ for all i .
- (iii) If S is non degenerate, then $\mathcal{T}(\text{SWAP}_i(S)) = \mathcal{T}(S)$ for all i .
- (iv) If S is degenerate only for $i \in \mathbb{Z}_8$, then $\mathcal{T}(\text{SWAP}_i(S)) = -\mathcal{T}(S)$.

Proof. (i) We prove it for SHRINK_0 , the other cases being similar. Let $S' = (w'_i) = \text{SHRINK}(S)$. Then

$$S' = ((u_0 v_0)^{n_0-1} u_0, w_1, w_2, w_3, (u_4 v_4)^{n_4-1} u_4, w_5, w_6, w_7).$$

First, S' being flat implies $\mathcal{T}(S') = 0$, by Lemma 19. If S is flat, the result follows. Otherwise, there exists $j \in \{-1, 0\}$ such that $w'_j w'_{j+1} = \varepsilon$, since SHRINK modifies only positions 0 and 4. Without loss of generality, assume that $j = 0$. Then $w_1 = \varepsilon$ and $|w_0| = d_0 = |w_1| + |w_3| = |w_3|$. Also, Lemma 15 applies at position 1 since any positive integer divides $|w_1| = 0$. Hence, $w_1 w_2 w_3 w_4 = \varepsilon \cdot p^k = p^k$ and $w_5 w_6 w_7 w_0 = \varepsilon \cdot q^k = q^k$ for some primitive words p, q and an integer $k \geq 2$, where $p w_2 = w_2 q$ and $|p| = |q|$ divides $\gcd(|w_3|, |w_0| + |w_2|)$. But $|w_0| = |w_3|$ implies that $|p|$ divides $|w_2|$, so that $p = q$ and then $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}([p^k \widehat{p}^k]) = \mathcal{T}([\varepsilon]) = 0$.

(ii) The case where S' is flat is solved in (i), since $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\text{SHRINK}_i(S)) = 0$. Now, assume that S' is not flat. Then $\text{FST}(w_i w_{i+1}) = \text{FST}(w'_i w'_{i+1})$ and $\text{LST}(w_i w_{i+1}) = \text{LST}(w'_i w'_{i+1})$ for all $i \in \mathbb{Z}_8$, so that

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\text{SHRINK}_0(S)) &= \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(w'_{i-2} w'_{i-1}, w'_i w'_{i+1}) \\ &= \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(w_{i-2} w_{i-1}, w_i w_{i+1}) \\ &= \mathcal{T}(S). \end{aligned}$$

(iii) We do the proof only for SWAP_0 . If all the w_i are nonempty, then

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\text{SWAP}_0(S)) &= \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(w'_{i-1}, w'_i) = \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(v_{i-1}, \widehat{w_{i+4}}) \\ &= \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(w_{i-2}, w_{i-1}) = \sum_{i \in \{1,3,5,7\}} \mathcal{T}(w_{i-1}, w_i) = \mathcal{T}(S) \end{aligned}$$

(iv) Without loss of generality, we suppose $i = 0$. Then w_0 and w_4 are both empty. Therefore,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\text{SWAP}_0(S)) &= \sum_{i \in \{0,2,4,6\}} \mathcal{T}(w'_{i-2} w'_{i-1}, w'_i w'_{i+1}) \\ &= \mathcal{T}(w'_6 w'_7, w'_0 w'_1) + \mathcal{T}(w'_0 w'_1, w'_2 w'_3) + \mathcal{T}(w'_2 w'_3, w'_4 w'_5) + \mathcal{T}(w'_4 w'_5, w'_6 w'_7) \\ &= \mathcal{T}(w'_7, w'_1) + \mathcal{T}(w'_1, w'_2) + \mathcal{T}(w'_3, w'_5) + \mathcal{T}(w'_5, w'_6) \end{aligned}$$

But, using Equations (13), (14), (15), the fact that w_0 and w_4 are empty and Lemma 15, we get

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(w'_7, w'_1) &= \mathcal{T}(v_7, v_1) = \mathcal{T}(w_6, w_2) = \mathcal{T}(\widehat{p}, \widehat{q}) = -\mathcal{T}(q, p) = -\mathcal{T}(w_7, w_1), \\ \mathcal{T}(w'_1, w'_2) &= \mathcal{T}(v_1, \widehat{w_6}) = \mathcal{T}(\widehat{w_6}, p) = \mathcal{T}(\widehat{w_6}, w_1) = \mathcal{T}(\widehat{w_6}, \widehat{w_5}) = -\mathcal{T}(w_5, w_6), \\ \mathcal{T}(w'_3, w'_5) &= \mathcal{T}(v_3, v_5) = \mathcal{T}(w_2, w_6) = \mathcal{T}(\widehat{q}, \widehat{p}) = -\mathcal{T}(p, q) = -\mathcal{T}(w_3, w_5), \\ \mathcal{T}(w'_5, w'_6) &= \mathcal{T}(v_5, \widehat{w_2}) = \mathcal{T}(\widehat{w_2}, q) = \mathcal{T}(\widehat{w_2}, w_5) = \mathcal{T}(\widehat{w_2}, \widehat{w_1}) = -\mathcal{T}(w_1, w_2).\end{aligned}$$

Hence, we conclude that

$$\mathcal{T}(\text{SWAP}_0(S)) = -\mathcal{T}(w_7, w_1) - \mathcal{T}(w_5, w_6) - \mathcal{T}(w_3, w_5) - \mathcal{T}(w_1, w_2) = -\mathcal{T}(S) \quad \square$$

Before proving Theorem 24, let us define what we mean by reduction of a DS-factorization. Let S and S' be two DS-factorizations such that $S' = \Theta_n \circ \dots \circ \Theta_2 \circ \Theta_1(S)$ where the Θ_i 's are operators on DS-factorizations. Let $S_k = \Theta_k \circ \Theta_{k-1} \circ \dots \circ \Theta_1(S)$, so that $S_0 = S$ and $S_n = S'$. Then we say that S *reduces to* S' if $|S_k| < |S_{k-1}|$ for all $k \in [1..n]$.

Proposition 23. *Let S be a DS-factorization such that $\mathcal{T}(S) = \pm 1$. Then, one of the conditions below holds:*

- (i) S is singular,
- (ii) SHRINK_i reduces S for some $i \in \mathbb{Z}_8$ and $\mathcal{T}(\text{SHRINK}_i(S)) = \pm 1$,
- (iii) SWAP_i reduces S for some $i \in \mathbb{Z}_8$ and $\mathcal{T}(\text{SWAP}_i(S)) = \pm 1$.

Proof. If there is $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ such that $|w_i| \geq d_i$, then S reduces to $\text{SHRINK}_i(S)$ by Lemma 21 (i). Moreover, by Lemma 22 (ii), $\mathcal{T}(\text{SHRINK}_i(S)) = \mathcal{T}(S) = \pm 1$.

Also, if $0 < |w_i| < d_i$ for all i , then S reduces to $\text{SWAP}_i(S)$ for some i by Lemma 21 (ii). Moreover, by Lemma 22 (iii), $\mathcal{T}(\text{SWAP}_i(S)) = \mathcal{T}(S) = \pm 1$.

Otherwise, assume that there exists i such that $|w_i| = 0$ and $0 < |w_j| < d_j$ for all $j \notin \{i, i+4\}$. Then S reduces to $\text{SWAP}_i(S)$ by Lemma 21 (iii). Moreover, by Lemma 22 (iv), $\mathcal{T}(\text{SWAP}_i(S)) = -\mathcal{T}(S) = \pm 1$.

Next, assume that there exists i such that $|w_i| = 0$ and $|w_{i+2}| = 0$. Then S is singular.

It remains to consider the case where there exists i such that $|w_i| = 0$ and $|w_{i+1}| = 0$ or $|w_{i+3}| = 0$, then S is flat so that $\mathcal{T}(S) = 0$ (Lemma 19) which is a contradiction. \square

Using the previous results, we are now ready to show that every double square is reducible.

Theorem 24. *Every DS-factorization of double square reduces to a singular DS-factorization.*

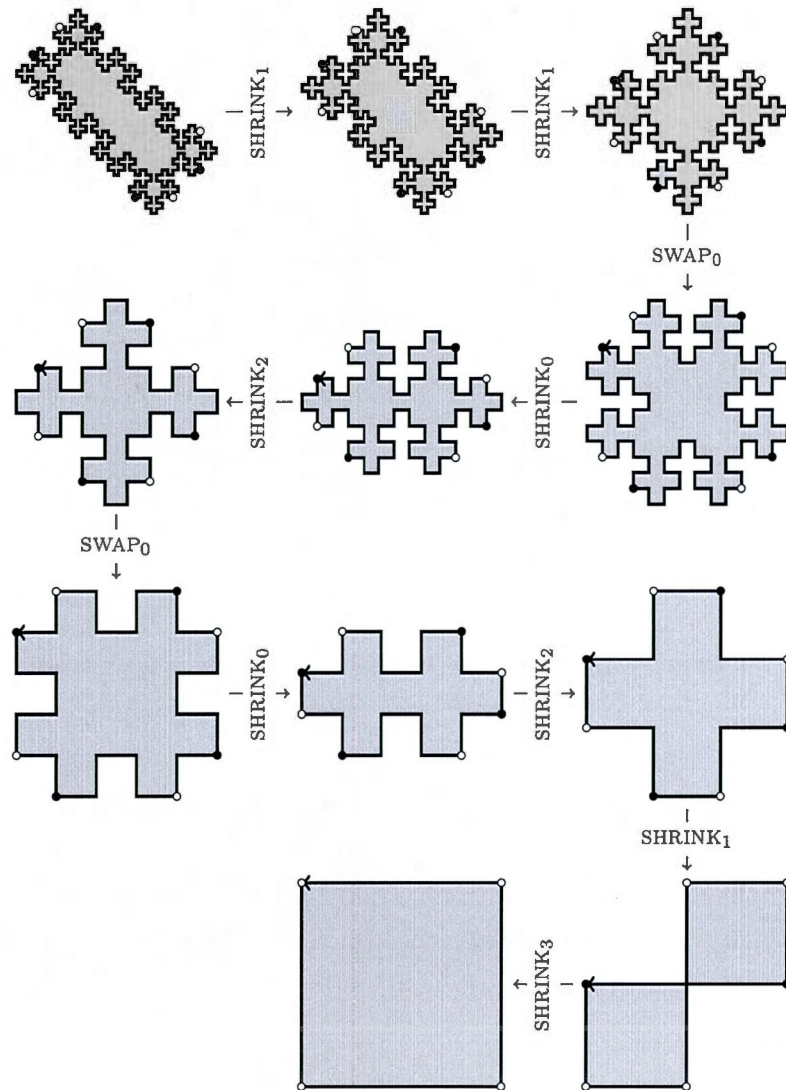


Figure 11: Reduction of a double square tile to a singular DS-factorization which in this case is the unit square.

Proof. Let S be the DS-factorization of a double square. From Proposition 2, the turning number of S is ± 1 . Hence, from Proposition 23, if S is non singular, either S may be reduced by SHRINK or SWAP to some DS-factorization S' , which both preserve the turning number ± 1 . If S' is not singular, then this

Algorithm 1 Reduction of a double square tile

```
1: function REDUCE( $S$ )
2:   Input: a DS-factorization  $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$  s.t.  $\mathcal{T}(S) = \pm 1$ 
3:   Output: an ordered list  $L$  of operators.
4:    $L \leftarrow []$  (empty list)
5:   while  $S$  is not singular do
6:     if there is  $i$  such that  $|w_i| \geq d_i$  then
7:        $S \leftarrow \text{SHRINK}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + [\text{SHRINK}_i]$ 
8:     else if  $0 < |w_i| < d_i$  for all  $i$  then
9:        $S \leftarrow \text{SWAP}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + [\text{SWAP}_i]$ 
10:    else if there is  $i$  s.t.  $|w_i| = 0$  and  $0 < |w_j| < d_j$  for all  $j \notin \{i, i+4\}$ 
11:      then
12:         $S \leftarrow \text{SWAP}_i(S)$ ,  $L \leftarrow L + [\text{SWAP}_i]$ 
13:      else  $\triangleright S$  is singular or flat
14:        Error: impossible case.
15:      end if
16:    end while
17:  return  $L$   $\triangleright S$  corresponds to a singular DS-factorization
18: end function
```

procedure can be done recursively. Since the length of the DS-factorization gets strictly smaller at each reduction (Lemma 21), Fermat's infinite descent principle applies. It follows that the number of iterations is finite and S reduces to a singular DS-factorization. \square

Algorithm 1 contains the pseudocode for the reduction and Figure 11 illustrates the execution of the reduction on a double square tile. The correctness of Algorithm 1 follows directly from Proposition 23 and Theorem 24.

Remark that in the reduction algorithm, the last operator must be SHRINK since $\text{SWAP}(S)$ is never singular when S is not. This observation is useful for proving Theorem 32 in Section 6 giving conditions under which a DS-factorization reduces to the unit square.

5 Generation of double square tiles

The previous section ended with Theorem 24 stating that every DS-factorization of a double square reduces to a singular DS-factorization. Therefore, it raises the question whether this leads to an algorithm that generates all double squares by inverting the reduction operators. It appears that SWAP is its own inverse under some conditions and that SHRINK can be inverted easily. In this section, we introduce and study more deeply the inverses of the reduction operators. Moreover, we give some relations between these operators and we provide an algorithm that generates all double squares up to a given perimeter length.

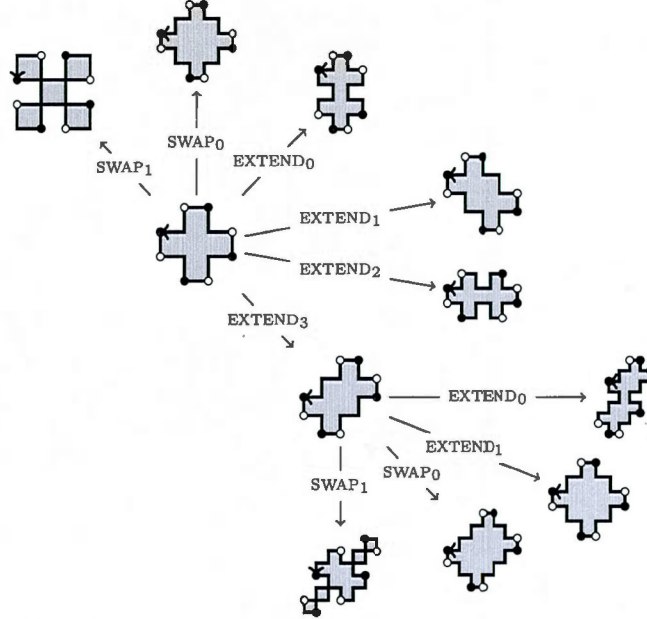


Figure 12: Subtree of the space of DS-factorizations generated when starting from the X pentomino.

Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a DS-factorization such that $d_0 \neq 0$. We define

$$\text{EXTEND}(S) = (w_0(v_0u_0), w_1, w_2, w_3, w_4(v_4u_4), w_5, w_6, w_7).$$

For any $i \in \mathbb{Z}_8$ such that $d_i \neq 0$, the operator EXTEND_i is naturally defined by

$$\text{EXTEND}_i = \text{SHIFT}^{-i} \circ \text{EXTEND} \circ \text{SHIFT}^i.$$

Proposition 25. *Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a DS-factorization such that $d_i \neq 0$. Then $\text{EXTEND}_i(S)$ is a DS-factorization.*

Proof. Without loss of generality, we only consider the case $i = 0$. By Lemma 8, we know that $w_0 = (u_0v_0)^{n_0}$ and $w_4 = (u_4v_4)^{n_4}$ for unique words u_0, v_0, u_4, v_4 and unique non negative integers n_0 and n_4 . Let $w'_0 = (u_0v_0)^{n_0+1}u_0$ and $w'_4 = (u_4v_4)^{n_4+1}u_4$. We show that

$$\text{EXTEND}(S) = (w'_0, w_1, w_2, w_3, w'_4, w_5, w_6, w_7)$$

is a DS-factorization. First we prove that $\widehat{w_3w'_4} = w_7w'_0$. Indeed, from Equation (14), we have $w_7u_0v_0 = \widehat{u_4v_4}w_7$ and we can write $\widehat{w_3w'_4}$ as

$$\widehat{u_4v_4} \widehat{u_4} \widehat{w_3} = \widehat{u_4v_4} w_7 w_0 = w_7 \cdot u_0 v_0 w_0 = w_7 w'_0$$

so that $\widehat{w_3 w'_4} = w_7 w'_0$. The proof that $\widehat{w'_4 w_5} = w'_0 w_1$ is about the same, using the equalities $v_0 u_0 w_1 = w_1 v_4 u_4$ (Equation (18)) and $w_0 w_1 = \widehat{w_5 w_4}$. \square

Under mild conditions, all operators are invertible, as shown by the next proposition.

Proposition 26. *Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a DS-factorization.*

- (i) $\text{SHIFT}^8(S) = S$;
- (ii) If $d_i \neq 0$, then $\text{SHRINK}_i \circ \text{EXTEND}_i(S) = S$;
- (iii) If $0 < d_i \leq |w_i|$, then $\text{EXTEND}_i \circ \text{SHRINK}_i(S) = S$;
- (iv) If S is non singular and u_{i+1} , u_{i+3} , u_{i+5} and u_{i+7} are nonempty, then $\text{SWAP}_i^2(S) = S$.

Proof. (i) Trivial.

(ii) This follows from the fact that all factors but w_i and w_{i+4} are not modified by SHRINK_i nor EXTEND_i and from the equalities $w_i = w_i(v_i u_i)(v_i u_i)^{-1}$ and $w_{i+4} = w_{i+4}(v_{i+4} u_{i+4})(v_{i+4} u_{i+4})^{-1}$.

(iii) Same idea as (ii) but since $|w_i| > d_i$, the equalities $w_i = w_i(v_i u_i)^{-1}(v_i u_i)$ $w_{i+4} = w_{i+4}(v_{i+4} u_{i+4})^{-1}(v_{i+4} u_{i+4})$ hold as well.

(iv) Without loss of generality, assume that $i = 0$. Notice that by definition, $v_j \neq \varepsilon$, for all $j \in \mathbb{Z}_8$ but it is possible to have $u_j = \varepsilon$. Clearly, SWAP is involutory for the factors at even positions $j \in \mathbb{Z}_8$, since the map $w_j \mapsto \widehat{w_{j+4}}$ is involutory. For odd positions, if $u_j \neq \varepsilon$, then the map $(u_j v_j)^{n_j} u_j \mapsto (v_j u_j)^{n_j} v_j$ is clearly involutory while, if $u_j = \varepsilon$, then $v_j^{n_j} = (u_j v_j)^{n_j} u_j \mapsto (v_j u_j)^{n_j} v_j = v_j^{n_j+1} \mapsto (u_j v_j)^{n_j+1} \neq v_j^{n_j}$. Hence, the assumptions $u_j \neq \varepsilon$ for odd $j \in \mathbb{Z}_8$ is necessary. \square

In order to provide a more efficient generation algorithm, it is worth mentioning that the operators EXTEND and SWAP satisfy commuting properties (see Figure 13).

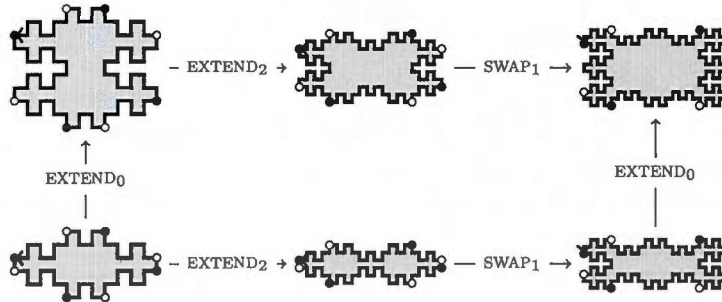


Figure 13: Two distinct ways of generating the same double square tile. The diagram commutes in virtue of Proposition 27(iii) and (iv).

Algorithm 2 Generation of double squares from a DS-factorization

```

1: function GENERATE( $S_0, n$ )
2:   Input:  $S_0$  any DS-factorization s.t.  $\mathcal{T}(S_0) = \pm 1$ ,  $n$  a positive integer
3:   Output: all double squares reducing to  $S_0$  of perimeter at most  $n$ 
4:    $T \leftarrow \emptyset$ 
5:    $Q \leftarrow \{S_0\}$ 
6:   while  $Q \neq \emptyset$  do
7:      $S \leftarrow \text{POP}(Q)$ 
8:     if  $S$  describes a polyomino then
9:        $T \leftarrow T \cup \{S\}$ 
10:    end if
11:     $U \leftarrow \{\text{EXTEND}_i(S) : i = 0, 1, 2, 3\} \cup \{\text{SWAP}_i(S) : i = 0, 1\}$ 
12:     $\triangleright U$  contains all tiles that may be generated from  $S$ 
13:     $Q \leftarrow Q \cup \{C \in U : |S| < |C| \leq n\}$ 
14:  end while
15:  return  $T$   $\triangleright T$  contains all tiles of size at most  $n$ 
16: end function

```

Proposition 27. Let $\Theta \in \{\text{EXTEND}, \text{SWAP}\}$ and $i \in \mathbb{Z}_8$.

- (i) $\Theta_i = \Theta_{i+4}$;
- (ii) If S is non singular, then $\text{SWAP}_i(S) = \text{SWAP}_{i+2}(S)$;
- (iii) If $d_i, d_{i+2} \neq 0$, then $\text{EXTEND}_{i+2} \circ \text{EXTEND}_i(S) = \text{EXTEND}_i \circ \text{EXTEND}_{i+2}(S)$;
- (iv) If S is non singular, then $\text{EXTEND}_{i+1} \circ \text{SWAP}_i = \text{SWAP}_i \circ \text{EXTEND}_{i+1}$;

Proof. We only show (iv), the other proofs being similar. Without loss of generality, we may assume $i = 0$. On one hand, we have

$$\begin{aligned}
 & (\text{SWAP}_0 \circ \text{EXTEND}_1)(S) \\
 &= \text{SWAP}_0(\text{EXTEND}_1(S)) \\
 &= \text{SWAP}_0(w_0, w_1(v_1u_1), w_2, w_3, w_4, w_5(v_5u_5), w_6, w_7) \\
 &= (\widehat{w_4}, (v_1u_1)^{n_1+1}v_1, \widehat{w_6}, (v_3u_3)^{n_3}v_3, \widehat{w_0}, (v_5u_5)^{n_5+1}v_5, \widehat{w_2}, (v_7u_7)^{n_7}v_7).
 \end{aligned}$$

On the other hand, we obtain

$$\begin{aligned}
 & (\text{EXTEND}_1 \circ \text{SWAP}_0)(S) \\
 &= \text{EXTEND}_1(\text{SWAP}_0(S)) \\
 &= \text{EXTEND}_1(\widehat{w_4}, (v_1u_1)^{n_1}v_1, \widehat{w_6}, (v_3u_3)^{n_3}v_3, \widehat{w_0}, (v_5u_5)^{n_5}v_5, \widehat{w_2}, (v_7u_7)^{n_7}v_7) \\
 &= (\widehat{w_4}, (v_1u_1)^{n_1+1}v_1, \widehat{w_6}, (v_3u_3)^{n_3}v_3, \widehat{w_0}, (v_5u_5)^{n_5+1}v_5, \widehat{w_2}, (v_7u_7)^{n_7}v_7). \quad \square
 \end{aligned}$$

Based on the preceding results, Algorithm 2 allows to generate all double squares of perimeter at most n . Notice that it may be improved significantly by using Proposition 27. More precisely, it is possible to avoid exploring all

paths involving commuting operators by choosing precedence on the operators. For instance, we could avoid using the operator EXTEND_1 if the last applied operator is either EXTEND_3 or SWAP_0 , i.e. these two last operators would precede EXTEND_2 . Figure 12 illustrates a partial trace of Algorithm 2 when starting with the X pentomino.

It is not clear whether Algorithm 2 is efficient for generation purposes, since it yields infinitely many nonsimple DS-factorization. On the other hand, our algorithm is clearly more effective than the naive strategy of enumerating all words of length n on \mathcal{F} and check if it describes a double square tile. It is worth mentioning that Line 8 can be achieved in linear time by using an algorithm of Brlek, Koskas and Provençal [8]. Moreover, a discussion in the next section shows that all prime double squares may be generated by setting S_0 to the unit square. Finally, the reader may notice that the enumeration of double squares according to increasing perimeter length can be accomplished by making Q a priority heap.

6 Prime double squares and palindromes

This section is devoted to the proof that double square tiles have a palindromic structure. For this purpose, it is convenient to define homologous morphisms: A morphism φ is called *homologous* if

$$\varphi(\widehat{w}) = \widehat{\varphi(w)}, \quad \text{for any word } w \in \mathcal{F}^*. \quad (21)$$

Clearly, if $AB\widehat{A}\widehat{B}$ is the boundary of a square tile Q , then the morphism

$$\varphi_{A,B} : 0 \mapsto A, 1 \mapsto B, 2 \mapsto \widehat{A}, 3 \mapsto \widehat{B}$$

is homologous.

A polyomino P is called *prime* if for any boundary word w of P , any boundary word u and any homologous morphism $\varphi_{A,B}$, the equality $w = \varphi_{A,B}(u)$ implies that either $AB\widehat{A}\widehat{B}$ or u is a boundary word of the unit square. Otherwise, P is called *composed* (see Figure 14). More intuitively, a polyomino is composed if it may be square-tiled by a smaller nontrivial polyomino.

Note that if D is composed, Theorem 1 does not hold as illustrated by Figure 15 which considers $\varphi_{A',B'} : 0 \mapsto 0100, 1 \mapsto 11, 2 \mapsto 2232, 3 \mapsto 33$.

In the sequel, we suppose that φ is homologous. Moreover, if $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ is a DS-factorization then we define

$$\varphi(S) = (\varphi(w_0), \varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \varphi(w_4), \varphi(w_5), \varphi(w_6), \varphi(w_7)).$$

The first statement we prove is that homologous morphisms preserve DS-factorizations.

Proposition 28. *Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$ be a DS-factorization. Then, $\varphi(S)$ is a DS-factorization.*

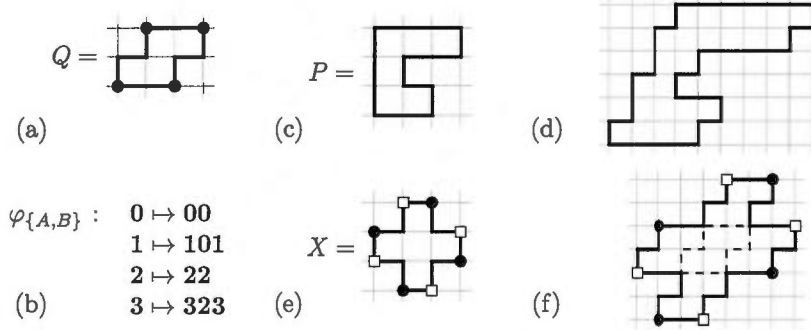


Figure 14: (a) A square tile Q with boundary word $AB\hat{A}\hat{B} = 00 \cdot 101 \cdot 22 \cdot 323$. (b) The homologous morphism $\varphi_{A,B}$. (c) A polyomino P with boundary word $u = 00121001222333$. (d) The composed tile having boundary word $\varphi_{A,B}(u)$. (e) The prime double square X pentomino having boundary word $v = 010121232303$. (f) The composed tile with boundary word $\varphi_{A,B}(v)$, which is also a double square tile.

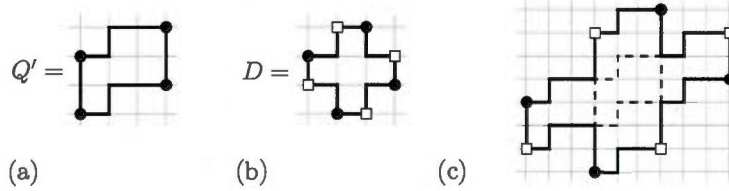


Figure 15: (a) A square tile Q' with boundary word $AB\hat{A}\hat{B} = 0100 \cdot 11 \cdot 2232 \cdot 33$. (b) The prime double square pentomino X with boundary word $v = 010121232303$. (c) The composed tile having boundary word $\varphi_{A,B}(v)$, which is not invariant under ρ^2 .

Proof. We verify the first condition, the other three being similar:

$$\widehat{\varphi(w_0)}\widehat{\varphi(w_1)} = \widehat{\varphi(w_0w_1)} = \widehat{\varphi(\widehat{w_0w_1})} = \varphi(w_4w_5) = \varphi(w_4w_5) = \varphi(w_4)\varphi(w_5). \quad \square$$

Let $w'_i = \varphi(w_i)$ and $d'_i = |w'_{i+1}| + |w'_{i+3}|$. From Lemma 8, if $d'_i \neq 0$, then there exist u'_i , v'_i and n'_i such that

$$\begin{aligned} \widehat{w'_{i-3}w'_{i-1}} &= u'_iv'_i \\ w'_i &= (u'_iv'_i)^{n'_i}u'_i \\ w'_{i+1}\widehat{w'_{i+3}} &= v'_iu'_i, \end{aligned}$$

where $0 \leq |u'_i| < d'_i$, for all i . The next technical lemma show that homologous morphisms also preserve the words u_i and v_i as well as the numbers n_i .

Lemma 29. For any $i \in \mathbb{Z}_8$ such that $d_i \neq 0$, $\varphi(u_i) = u'_i$, $\varphi(v_i) = v'_i$ and $n'_i = n_i$.

Proof. Without loss of generality, we only show the case $i = 0$. First we observe that

$$u'_0 v'_0 = \widehat{w'_5 w'_7} = \widehat{\varphi(w_5) \varphi(w_7)} = \varphi(\widehat{w_5} \varphi(w_7)) = \varphi(\widehat{w_5} w_7) = \varphi(u_0 v_0).$$

We want to show that $|u'_0| = |\varphi(u_0)|$. We also have

$$(u'_0 v'_0)^{n'_0} u'_0 = w'_0 = \varphi(w_0) = \varphi((u_0 v_0)^{n_0} u_0) = \varphi(u_0 v_0)^{n_0} \varphi(u_0) = (u'_0 v'_0)^{n_0} \varphi(u_0).$$

Then we have

$$d'_0 \cdot n'_0 + |u'_0| = d'_0 \cdot n_0 + |\varphi(u_0)|$$

with $0 \leq |u'_0| < d'_0$ and $0 \leq |\varphi(u_0)| < |\varphi(u_0 v_0)| = |u'_0 v'_0| = d'_0$. The unicity of the quotient and remainder of the division of $|w'_0|$ by d'_0 yields $n'_0 = n_0$ and $|u'_0| = |\varphi(u_0)|$. We conclude that $\varphi(u_0) = u'_0$ and $\varphi(v_0) = v'_0$. \square

Another useful fact is that homologous morphisms and the generation operators commute (see Figure 16).

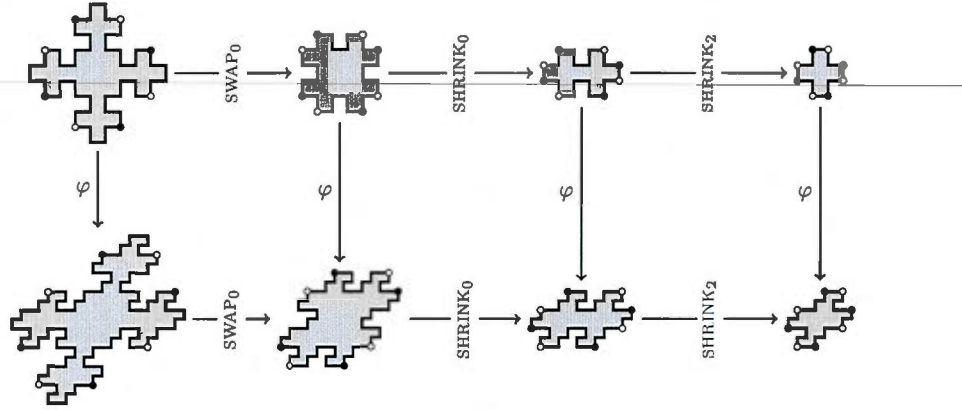


Figure 16: Generation operators and homologous morphisms commute.

Proposition 30. Let $i \in \mathbb{Z}_8$. Then

- (i) φ and EXTEND_i commute;
- (ii) φ and SWAP_i commute.

Proof. We prove the result for $i = 0$, the other cases being symmetric.

(i) Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$. Then by Lemma 29

$$\begin{aligned}
\varphi(\text{EXTEND}_0(S)) &= \varphi(w_0 v_0 u_0, w_1, w_2, w_3, w_4 v_4 u_4, w_5, w_6, w_7) \\
&= (w'_0 \varphi(v_0 u_0), w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 \varphi(v_4 u_4), w'_5, w'_6, w'_7) \\
&= (w'_0 v'_0 u'_0, w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 v'_4 u'_4, w'_5, w'_6, w'_7) \\
&= \text{EXTEND}_0(w'_0, w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, w'_6, w'_7) \\
&= \text{EXTEND}_0(\varphi(S)).
\end{aligned}$$

(ii) Let $S = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}_8}$. Then by Lemma 29

$$\begin{aligned}
\varphi(\text{SWAP}_0(S)) &= \varphi(\widehat{w_4}, (v_1 u_1)^{n_1} v_1, \dots) \\
&= (\varphi(\widehat{w_4}), \varphi((v_1 u_1)^{n_1} v_1), \dots) \\
&= (\widehat{\varphi(w_4)}, (\varphi(v_1) \varphi(u_1))^{n_1} \varphi(v_1), \dots) \\
&= (\widehat{w'_4}, (v'_1 u'_1)^{n'_1} v'_1, \dots) \\
&= \text{SWAP}_0(w'_0, w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, w'_6, w'_7) \\
&= \text{SWAP}_0(\varphi(S)). \quad \square
\end{aligned}$$

As a consequence, we conclude that composed tiles are preserved by generation operators while prime tiles are preserved by reduction operators.

Proposition 31. *Let $i \in \mathbb{Z}_8$. Then*

(i) EXTEND_i and SWAP_i preserve composed double square tiles.

(ii) SHRINK_i and SWAP_i preserve prime double square tiles.

Proof. (i) Let S be DS-factorization. If S is composed, there exists a homologous morphism φ and another DS-factorization T such that $S = \varphi(T)$ where T is not the unit square. From Proposition 30, we have

$$\text{SWAP}_i(S) = \text{SWAP}_i(\varphi(T)) = \varphi(\text{SWAP}_i(T))$$

and

$$\text{EXTEND}_i(S) = \text{EXTEND}_i(\varphi(T)) = \varphi(\text{EXTEND}_i(T))$$

so that $\text{SWAP}_i(S)$ and $\text{EXTEND}_i(S)$ are composed double square tile.

(ii) This statement is the contrapositive of (i). \square

Note that SHRINK_i do not preserve composed tiles and EXTEND_i do not preserve prime tiles as illustrated in Figure 17.

Theorem 32. *Let D be a double square tile. If D is prime, then D reduces to the unit square.*

Proof. Let D be a double square tile and S be its DS-factorization. From Theorem 24, S reduces to a singular DS-factorization T of the form:

$$T = (\varepsilon, w_1, \varepsilon, w_3, \varepsilon, \widehat{w_1}, \varepsilon, \widehat{w_3})$$

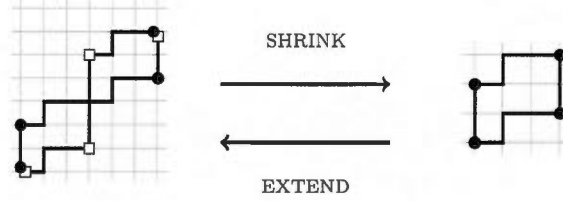


Figure 17: The degenerate double square to the left is a composed tile whereas the singular double square tile to the right is prime. This illustrates that SHRINK_i does not preserve composed tiles and EXTEND_i does not preserve prime tiles.

where each of the intermediate DS-factorization is prime since D is prime (Proposition 31). Also, the last operator used in the reduction algorithm must be SHRINK_i where $i \in \{0, 2, 4, 6\}$, since $\text{SWAP}_i(S)$ cannot be singular by Proposition 20. Therefore, the penultimate DS-factorization in the reduction algorithm is of the form

$$\text{EXTEND}_0(T) = (w_1 \widehat{w_3}, w_1, \varepsilon, w_3, \widehat{w_1} w_3, \widehat{w_1}, \varepsilon, \widehat{w_3}).$$

But, this last double square is prime only if w_1 and w_3 are letters, so that T is the unit square. \square

We conclude this section by proving Theorem 1. Before doing so, we need two last technical lemmas.

Lemma 33. *The following conditions are equivalent:*

- (i) $w_i w_{i+1}$ is a palindrome for all i ;
- (ii) $w_i = \overline{w_{i+4}}$ for all i ;
- (iii) $u_i = \overline{u_{i+4}}$ and $v_i = \overline{v_{i+4}}$ for all i .

Proof. We first show that (i) and (ii) are equivalent. Since $w_i w_{i+1} = \widehat{w_{i+5}} \widehat{w_{i+4}}$, we have that $w_i w_{i+1}$ is a palindrome if and only if $\widehat{w_{i+1}} \widehat{w_i} = w_i w_{i+1} = \widehat{w_{i+5}} \widehat{w_{i+4}}$. But $|w_i| = |w_{i+4}|$ and the result follows.

Next, we prove that (ii) and (iii) are equivalent. Since $|u_i| = |u_{i+4}|$ and $|v_i| = |v_{i+4}|$ for all $i \in \mathbb{Z}_8$, we deduce that $w_i = \overline{w_{i+4}}$ for all $i \in \mathbb{Z}_8$ if and only if

$$u_i v_i = \widehat{w_{i-3}} w_{i-1} = \widehat{w_{i+1}} \overline{w_{i+3}} = \overline{\widehat{w_{i+1}} w_{i+3}} = \overline{u_{i+4} v_{i+4}}. \quad \square$$

The next lemma states that palindromicity is preserved by the reduction and generation operators.

Lemma 34. *The operators SHIFT, EXTEND, SHRINK, SWAP, all preserve palindromes in the following sense. Let S be a DS-factorization such that $w_i w_{i+1}$ is a palindrome for all $i \in \mathbb{Z}_8$ and $S' = \Theta(S)$ be another DS-factorization, where Θ is one of the above operators. Then $w'_i w'_{i+1}$ is a palindrome as well, for $i \in \mathbb{Z}_8$.*

Proof. Since the operator SHIFT preserved exactly the factors $w_i w_{i+1}$, the result is trivial in this case. Consider now EXTEND_0 . We have to show that $w'_0 w'_1 = w_0 \cdot w_1 v_1 u_1$ and $w'_1 w'_2 = w_1 u_1 v_1 \cdot w_2$ are palindromes. From Equations (13), (16) and (19), we can write $w_0 w_1 v_1 u_1 = \widehat{u_5 v_5} w_0 w_1$. Since $\widehat{u_5 v_5} = \widetilde{u_1 v_1}$ (Lemma 33 (iii)), this proves that $w_0 w_1 v_1 u_1$ is a palindrome. Similarly, we prove that $w_1 v_1 u_1 w_2 = w_1 w_2 \widehat{v_5 u_5} = u_1 v_1 w_1 w_2$ is a palindrome. To show that SHRINK_0 preserve the palindromes, the steps to do are the same as for EXTEND_0 , removing a period instead of adding one. Consider now the operator SWAP_0 . From Lemma 33 and Equations (14) and (19), we obtain

$$\begin{aligned} w'_0 \cdot w'_1 &= w_0 v_0 u_0 w_1 = w_0 w_1 \widehat{v_4 u_4} = \widetilde{w_1} \widetilde{w_1} \widehat{v_4 u_4} = \widetilde{w_1} \widetilde{w_1} \widetilde{v_0 u_0} \\ &= u_0 \widetilde{v_0 w_0} w_1 = \widetilde{w'_0 w'_1} \end{aligned}$$

The argument is the same to prove that the other factors $w'_i w'_{i+1}$ also are palindromes. \square

As a consequence, we solve the conjecture of Provençal and Vuillon [17]:

Proof of Theorem 1. If D is a prime double square tile, it reduces to the unit square by Theorem 32 which is made of palindromes but generation operators preserve palindromes $w_i w_{i+1}$ by Lemma 34. \square

7 Concluding remarks and open problems

Although we have described an algorithm that exhaustively generate double squares, there is room for efficiency improvements. First, we have not yet been able to find a double square tile having turning number ± 1 such that Line 10 of Algorithm 1 is used. Hence, we are tempted to conjecture that it could be removed. Also, it would be interesting to study and perhaps improve the complexity of Algorithms 1 and 2.

Moreover, we observed that, for instance, all DS-factorizations starting from the DS-factorization $(\text{EXTEND}_0 \circ \text{EXTEND}_1 \circ \text{EXTEND}_1)(\varepsilon, \mathbf{2}, \varepsilon, \mathbf{3}, \varepsilon, \mathbf{0}, \varepsilon, \mathbf{1})$ are not simple (see Figure 18). It would be interesting to verify if it is indeed the case and if other branches from the space explored by Algorithm 2 also yield only nonsimple paths, in order to enumerate more efficiently double square tiles. Lemma 15 (v) is probably a good starting point for further investigations in that direction. In the same spirit, it seems that every double square tile might be generated uniquely up to the commutative properties of the SHRINK_i and SWAP_i operators stated in Proposition 27.

Empirical observations suggests that when applying Algorithm 1 to a double square, it reduces to a composed X pentomino in a way such that each intermediate DS-factorization describes a simple closed path.

Conjecture 35. *Let S be the DS-factorization of a double square tile. Then S reduces to the polyomino $\varphi(X)$ where φ is an homologous morphism and X is the X pentomino. Moreover, each intermediate DS-factorization is a polyomino as well.*

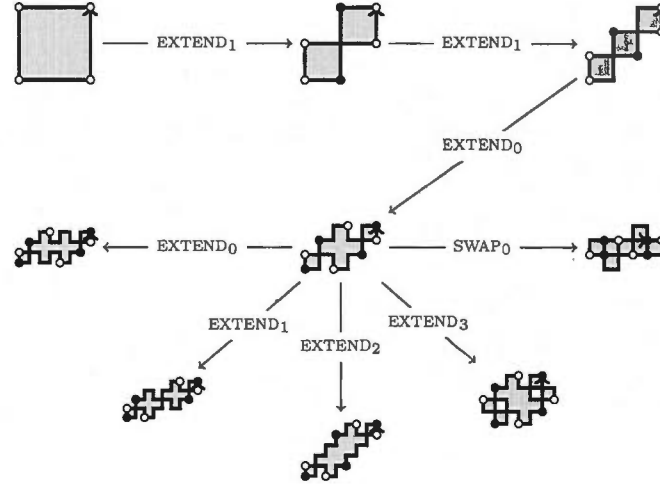


Figure 18: Subtree of DS-factorizations yielding only nonsimple paths.

Also, it seems that the boundary of a prime double square is made only of left and right turns. More formally, we make the following conjecture.

Conjecture 36. *Let $w \in \mathcal{F}^*$ be the boundary word of a prime double square tile. Then for all letter $\alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha\alpha$ is not a factor of $[w]$. Equivalently, $\Delta([w]) \in \{1, 3\}^*$.*

A natural question comes when working with homologous morphisms : *Does homologous morphisms preserve primitive words?* It turns out to be false for the morphism $\varphi_{A,B}$ with $A = 0$, $B = 101$. Indeed, 01 is primitive but $\varphi_{A,B}(01) = 0101$ is not. But we believe it is true if $AB\hat{A}\hat{B}$ is the boundary of a polyomino. This question can be written in terms of codes (see chapter on circular codes in [2]). A submonoid M of the free monoid \mathcal{A}^* is *very pure* if for all $u, v \in \mathcal{A}^*$, $uv, vu \in M$ implies that $u, v \in M$.

Conjecture 37. *Let $A, B \in \mathcal{F}^*$ be two primitive words. Then $w = AB\hat{A}\hat{B}$ is the boundary word of a square tile, i.e. none of the proper factors of conjugates of w is closed, if and only if $\{A, B, \hat{A}, \hat{B}\}^*$ is a very pure submonoid.*

For example, 010121232303 is the boundary of a square tile containing no closed proper factors and $M = \{010, 121, 232, 303\}^*$ is very pure. Also, 01012323 is a closed path containing closed proper factors and $M = \{0, 101, 2, 323\}^*$ is not very pure because $01 \cdot 01 \in M$ but $01 \notin M$.

Acknowledgements

This research was driven by computer exploration using the open-source mathematical software *Sage* [18] and its library on Combinatorics on words developed

by the *Sage-Combinat* community, and in particular by the active developers: A. Blondin Massé, V. Delecroix, S. Labbé, T. Monteil and F. Saliola. This paper is an extended version of the communication [6] presented at GASCom'10. Also, we wish to thank the anonymous referees whose comments and suggestions lead to a considerable improvement of the article.

References

- [1] D. Beauquier and M. Nivat. On translating one polyomino to tile the plane. *Discrete Comput. Geom.*, 6:575–592, 1991.
- [2] J. Berstel, D. Perrin, and C. Reutenauer. *Codes and Automata*, volume 129 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon, and S. Labbé. Equations on palindromes and circular words. *Theor. Comput. Sci.*, 412(27):2922–2930, 2011.
- [4] A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Garon, and S. Labbé. Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways. *Theor. Comput. Sci.*, 412(36):4778–4786, 2011.
- [5] A. Blondin Massé, S. Brlek, and S. Labbé. A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways. *Discrete Applied Mathematics*, 160(7-8):1011–1018, 2012.
- [6] A. Blondin Massé, A. Garon, and S. Labbé. Generation of double square tiles. In *GASCom 2010*, Montreal, Canada, 2010. Electronic proceedings.
- [7] P. Brass, W. Moser, and J. Pach. *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer-Verlag New York, 2005.
- [8] S. Brlek, M. Koskas, and X. Provençal. A linear time and space algorithm for detecting path intersection in \mathbb{Z}^d . *Theor. Comput. Sci.*, 412(36):4841–4850, 2011.
- [9] S. Brlek, G. Labelle, and A. Lacasse. A note on a result of Daurat and Nivat. In C. de Felice and A. Restivo, editors, *Proc. DLT 2005, 9-th International Conference on Developments in Language Theory*, number 3572 in LNCS, pages 189–198, Palermo, Italia, 4–8 July 2005. Springer-Verlag.
- [10] S. Brlek, G. Labelle, and A. Lacasse. Properties of the contour path of discrete sets. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 17(3):543–556, 2006.
- [11] S. Brlek, X. Provençal, and J.-M. Fédou. On the tiling by translation problem. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3):464–475, 2009.
- [12] A. Daurat and M. Nivat. Salient and reentrant points of discrete sets. In A. del Lungo, V. di Gesu, and A. Kuba, editors, *Proc. IWOCIA'03, International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Palermo, Italia, 14–16 May 2003. Elsevier Science.
- [13] S. W. Golomb. *Polyominoes, second edition*. Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [14] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman, New York, 1987.
- [15] M. Lothaire. *Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [16] A. Blondin Massé and S. Labbé. #13069 Generation of Double Square Tiles. The Sage Development Team, 2012. http://trac.sagemath.org/sage_trac/ticket/13069.
- [17] X. Provençal. *Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages*. PhD thesis, D1715, Université du Québec à Montréal, 2008.
- [18] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 5.0)*. The Sage Development Team, 2012. <http://www.sagemath.org>.
- [19] H. A. G. Wijshoff and J. van Leeuwen. Arbitrary versus periodic storage schemes and tessellations of the plane using one type of polyomino. *Inform. Control*, 62:1–25, 1984.

CHAPITRE III

COMPLEXITÉ PALINDROMIQUE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la complexité palindromique des mots, c'est-à-dire au nombre de palindromes qu'un mot contient qu'il soit fini ou infini. Par exemple, les 17 facteurs du mot $w_1 = abaabb$ sont

$$L(w_1) = \{\varepsilon, aba, abaa, a, ab, abaab, ba, bb, b, aab, aabb, abb, aa, baa, baab, baabb, abaabb\}$$

et parmi ceux-ci, 7 sont des palindromes :

$$\text{Pal}(w_1) = \{\varepsilon, baab, a, aa, aba, b, bb\}.$$

Prenons un second exemple. Les 20 facteurs du mot $w_2 = abcadb$ sont

$$L(w_2) = \{\varepsilon, c, ab, ad, cad, cadb, bcad, d, adb, db, a, bcadb, b, ca, bc, bca, abc, abca, abcad, abcadb\}$$

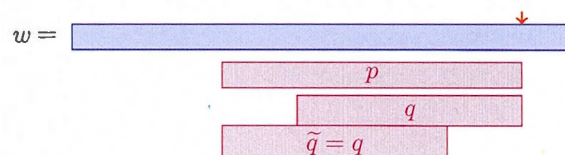
et parmi ceux-ci, seulement 5 sont des palindromes :

$$\text{Pal}(w_2) = \{\varepsilon, a, b, c, d\}.$$

Il a été établi que le nombre de palindromes contenus dans un mot de longueur n est borné par $n + 1$.

Théorème 3.1. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) *Si $w \in \Sigma^*$, alors $|\text{Pal}(w)| \leq |w| + 1$.*

Démonstration. Supposons par contradiction que le nombre de palindromes de w dépasse $|w| + 1$. En lisant le mot w de gauche à droite, chaque palindrome apparaît une première fois : c'est sa première occurrence. Considérons la fin de chacune des premières occurrences de chacun des palindromes. Comme il y a $|w| + 1$ positions possibles, selon le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe deux palindromes p et q dont la première occurrence termine à la même position. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que q est plus petit que p .



Comme q est un suffixe de p et que p est un palindrome, alors \tilde{q} est un préfixe de p . Mais comme q est aussi un palindrome, alors q est un préfixe de p . Ceci est une contradiction, car on a trouvé une occurrence de q qui précède la première occurrence de q . \square

Ainsi, le mot $w_1 = abaabb$ atteint la borne supérieure du nombre de palindromes, car il contient $7 = 6 + 1$ palindromes. Toutefois, le mot $w_2 = abcadb$, aussi de longueur 6, n'atteint pas cette borne, car il contient moins de 7 palindromes. Cependant, les mots sturmiens finis atteignent aussi la borne supérieure.

Théorème 3.2. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) *Tout mot sturmien fini w possède exactement $|w| + 1$ palindromes distincts.*

Une conséquence des résultats précédents est que l'ajout d'une lettre à un mot ajoute au plus un nouveau palindrome à ses facteurs. Observons ce principe sur le mot de Fibonacci, un mot sturmien bien connu. À chaque lettre ajoutée, un nouveau palindrome est créé. Ceux-ci sont indiqués sous la barre horizontale ci-dessous.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
f =	a	b	a	a	b	a	b	a	a	b	a	a	b	a	b	...

Palindromes

```

a
  b
a b a
  a a
    b a a b
a b a a b a
      b a b
        a b a b a
          a a b a b a a

```

Exemple Sage 3.3.

Pour créer le mot de Fibonacci dans Sage.

```

sage: words.FibonacciWord('ab')
word: abaababaabaababaababaabaababaaba...

```

Dans (Brlek et al., 2004), les auteurs ont défini le *défaut* $D(w)$ d'un mot fini w comme la différence entre le nombre maximal de palindromes qu'il peut contenir et le nombre de palindromes qu'il contient :

$$D(w) = |w| + 1 - |\text{Pal}(w)|.$$

De plus, ils ont étendu cette définition aux mots infinis \mathbf{w} de la manière naturelle :

$$\begin{aligned}
 D(\mathbf{w}) &= \sup_{w \in L(\mathbf{w})} D(w) \\
 &= \sup_{w \in \text{Pref}(\mathbf{w})} D(w).
 \end{aligned}$$

Le défaut d'un mot infini peut ainsi être fini ou infini. Toujours selon la terminologie des

précédents auteurs, un mot fini ou infini w est *plein* si son défaut est nul, c'est-à-dire si $D(w) = 0$. D'après le Théorème 3.2, les mots sturmiens et leurs facteurs sont pleins. En particulier, le mot de Fibonacci f est plein.

Depuis 2009, certains auteurs (Glen et al., 2009; Bucci et al., 2009b; Pelantová et Starosta, 2011) utilisent *riche* plutôt que *plein*. Dans ce texte, nous préférons utiliser *plein* et être fidèle à la définition de (Brlek et al., 2004), car *plein* évoque qu'une limite est atteinte. Le mot de Thue-Morse est un mot infini qui contient une infinité de palindromes. Il est donc naturel de dire que le mot de Thue-Morse est riche en palindromes, alors qu'il n'est pas plein comme nous allons le voir.

3.1 *Palindromic complexity of codings of rotations*

Cette section contient un article sur la complexité palindromique des codages de rotations sur deux intervalles. Ce travail est commun avec Laurent Vuillon, Alexandre Blondin Massé et Srećko Brlek. Les codages de rotations sur deux intervalles sont une généralisation des mots sturmiens et nous avons démontré qu'ils se comportent comme ces derniers pour la complexité palindromique. Rappelons qu'il avait déjà été démontré que les mots sturmiens sont étroitement liés aux palindromes.

Théorème 3.4. (Droubay et Pirillo, 1999) *Un mot infini w est sturmien si et seulement si, pour tout $n \geq 1$,*

$$|\text{Pal}_n(w)| = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ce résultat de Droubay et Pirillo a été généralisé aux suites sturmiennes bidimensionnelles où les palindromes sont définis comme des facteurs rectangles centrosymétriques (Berthé et Vuillon, 2001). Or, les codages de rotation sont une autre façon de généraliser la notion de mot sturmien.

Soit $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La fonction $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la rotation donnée par

$$R_\alpha(x) = (x + \alpha \mod 1).$$

On partitionne le cercle unité \mathbb{R}/\mathbb{Z} en deux intervalles non vide $I_1 = [0, \beta[$ et $I_0 = [\beta, 1[$. La suite symbolique $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $c_i \in \{0, 1\}$ est définie par la règle

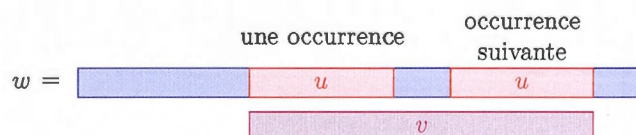
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } R_\alpha^i(x) \in [0, \beta[, \\ 0 & \text{si } R_\alpha^i(x) \in [\beta, 1[. \end{cases}$$

La suite infinie $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est le *codage de rotation sur deux intervalles* de paramètres (x, α, β) . Notons que dans le cas particulier où $\alpha = \beta$, le codage de rotation obtenu est un mot sturmien.

Dans l'article *Palindromic complexity of codings of rotations*, nous étudions la complexité palindromique des codages de rotations sur deux intervalles et notre résultat principal est :

Théorème 3.5 (Blondin Massé, Brlek, Labbé, Vuillon, 2011). *Tout mot infini obtenu par codage de rotations sur deux intervalles de paramètres α, β et x est plein.*

Notre preuve utilise les mots de retour et particulièrement l'équivalence énoncée au Lemme 3.6. On dit que v est un *mot de retour complet* de u dans w si v commence à une occurrence de u et termine à la fin de la prochaine occurrence de u .



Lemme 3.6. (Glen et al., 2009, Théorème 2.14) *Un mot infini w est plein si et seulement si tous les mots de retour complets de palindromes de w sont des palindromes.*

Les mots de retour permettent de caractériser les suites sturmiennes. En effet, il a été démontré dans (Vuillon, 2001) qu'une suite est sturmienne si et seulement si chaque facteur non vide possède exactement deux mots de retour. Dans notre article, nous obtenons aussi le résultat suivant sur les mots de retour.

Proposition 3.7. (Blondin Massé et al., 2009; Blondin Massé et al., 2011b) *Tout facteur d'un codage de rotation sur deux intervalles possède au plus 4 mots de retour complets. La borne supérieure est réalisée seulement pour un nombre fini de facteurs et ceux-ci sont la puissance d'une lettre.*

Enfin, nous proposons une preuve combinatoire d'un cas particulier de séquences de Rote en considérant à la fois les palindromes et les antipalindromes.

Exemple Sage 3.8.

Dans l'article, deux exemples sont considérés pour illustrer les cas possibles. Pour construire ces exemples dans Sage, on procède comme suit :

```
sage: coding = words.CodingOfRotationWord
sage: wex2 = coding(alpha=0.222435236, beta=0.30234023, x=0.23435636)
sage: wex2
word: 1000100011000100011000100011000100011000...
sage: wex3 = coding(alpha=0.422435236, beta=0.30234023, x=0.23435636)
sage: wex3
word: 1010000101000010000101000010100001010010...
```

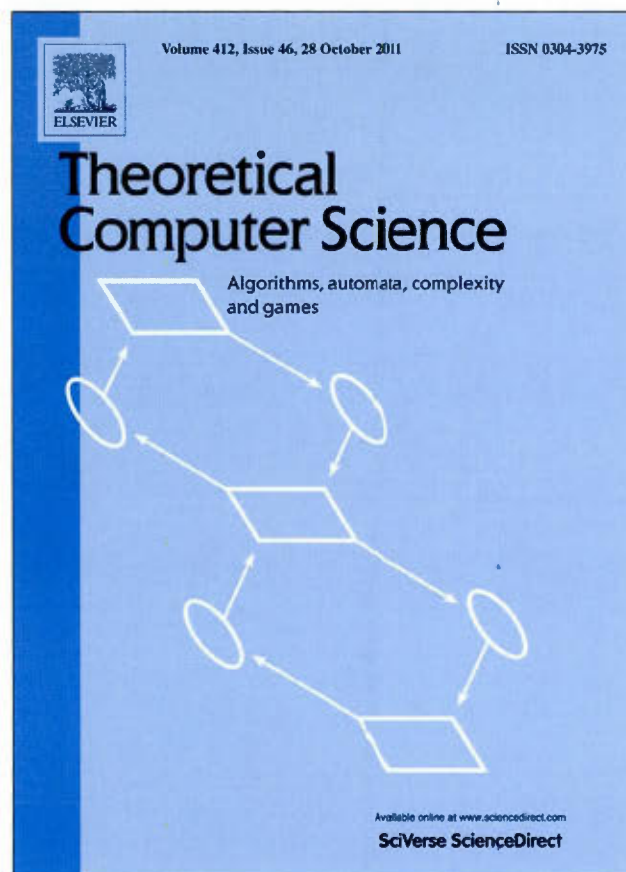
Pour calculer le nombre de palindromes dans un préfixe d'une certaine longueur :

```
sage: len(wex2[:100].palindromes())
101
sage: len(wex3[:1000].palindromes())
1001
```

Pour observer les quatre mots de retour complets du facteur 000 dans le mot wex3:

```
sage: fact = Word([0,0,0])
sage: it = wex3.complete_return_words_iterator(fact)
sage: for _ in range(10): it.next()
word: 0000
word: 000101000
word: 0000
word: 0001000
word: 0000
word: 000101000
word: 0000
word: 000101000
word: 0000
word: 00010100101000
```

Provided for non-commercial research and education use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.



This article appeared in a journal published by Elsevier. The attached copy is furnished to the author for internal non-commercial research and education use, including for instruction at the authors institution and sharing with colleagues.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Theoretical Computer Science

journal homepage: www.elsevier.com/locate/tcs



Palindromic complexity of codings of rotations

A. Blondin Massé^{a,b,*}, S. Brlek^a, S. Labbé^{a,c}, L. Vuillon^b

^a LaCIM, Université du Québec à Montréal, C. P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8

^b Laboratoire de mathématiques, CNRS UMR 5127, Université de Savoie, 73376 Le Bourget-du-lac cedex, France

^c LIRMM, UMR 5506 CNRS, Université Montpellier II, 34392 Montpellier, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 5 January 2010

Received in revised form 11 February 2011

Accepted 2 August 2011

Communicated by J. Karhumäki

Keywords:

Codings of rotations

Sturmian

Rote

Return words

Full words

ABSTRACT

We study the palindromic complexity of infinite words obtained by coding rotations on partitions of the unit circle by inspecting the return words. The main result is that every coding of rotations on two intervals is full, that is, it realizes the maximal palindromic complexity. As a byproduct, a slight improvement about return words in codings of rotations is obtained: every factor of a coding of rotations on two intervals has at most 4 complete return words, where the bound is realized only for a finite number of factors. We also provide a combinatorial proof for the special case of complementary-symmetric Rote sequences by considering both palindromes and antipalindromes occurring in it.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

A coding of rotations is a symbolic sequence obtained from iterative rotations of a point x by an angle α and according to a partition of the unit circle [1]. When the partition consists of two intervals, the resulting coding is a binary sequence. In particular, it yields the famous Sturmian sequences if the size of one interval is exactly α with α irrational [2]. Otherwise, the coding is a Rote sequence if the length of the intervals are rationally independent of α [3] and quasi-Sturmian in the other case [4]. Numerous properties of these sequences have been established regarding subword complexity [1], continued fractions and combinatorics on words [4], or discrepancy and substitutions [5].

The palindromic complexity $|\text{Pal}(w)|$, i.e. the number of distinct palindrome factors, of a finite word w is bounded by $|w| + 1$ [6] and w is called *full* ([7], or *rich* in [8]) if it realizes that upper bound. Naturally, an infinite word is said to be *full* if all its finite factors are full. The case of periodic full words was completely characterized in [7]. On the other hand, Sturmian words, which are particular cases of coding of rotations, and even episturmian words are full [6]: this result is obtained by showing that the longest palindromic suffix of every nonempty prefix is uni-occurent; rephrasing this property in terms of return words, one has that a word w is full if and only if each complete return word of every palindrome in w is a palindrome [8].

Our main result is Theorem 19 stating that every word generated by codings of rotations is full. To achieve this, we start with a thorough study of partitions of the unit circle into sets I_w according to some trajectories under rotations labeled by w . The proof is based on two cases, whether I_w is an interval or not: Propositions 11 and 16 handle those cases. We use the property that each factor of a coding of rotations on two intervals has at most 4 complete return words, where the bound is realized only for a finite number of factors w , those such that I_w is not an interval and w is some power of a letter.

* Correspondence to: LaCIM, Université du Québec à Montréal, C. P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8. Tel.: +1 514 987 7902.

E-mail addresses: alexandre.blondin.masse@gmail.com (A. Blondin Massé), Brlek.Srecko@uqam.ca (S. Brlek), slabqc@gmail.com (S. Labbé), Laurent.Vuillon@univ-savoie.fr (L. Vuillon).

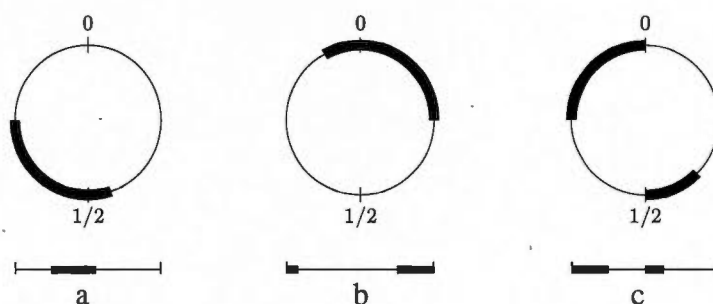


Fig. 1. (a) The interval $[0.25, 0.55]$. (b) The interval $[0.75, 0.08]$. (c) Not an interval.

Moreover, these partitions show some remarkable geometrical symmetries that are useful for handling return words: in particular, if the trajectory of a point is symmetric with respect to some global axis, then the coding of rotations from this point is a palindrome. When the first return function is a bijection then it coincides with some interval exchange transformation, a very useful fact for proving our claim. A direct consequence of our study on return words is that every coding of rotations on two intervals is full.

The paper is divided into four parts. First the basic terminology is introduced, notation and tools relative to combinatorics on words, the unit circle, interval exchange transformations, Poincaré's first return function and codings of rotations. In particular, some conditions for the Poincaré's first return function to be a bijection and consequently an interval exchange transformation are stated. Section 3 contains results about partitions of the unit circle induced by codings of rotations. Section 4 is devoted to the statement and proof of the main result. In Section 5, we provide an alternative proof of the fact that complementary-symmetric words (i.e. words with complexity $f(n) = 2n$ whose language is closed under swapping of letters) are also full by considering both palindromes and antipalindromes occurring in it.

2. Preliminaries

The basic terminology about words is borrowed from M. Lothaire [9]. In what follows, Σ is a finite alphabet whose elements are called letters. A word is a finite sequence of letters $w : [0..n-1] \rightarrow \Sigma$, where $n \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. The length of w is $|w| = n$ and w_i denote its i -th letter. If k and ℓ are two nonnegative integers, then $w_{[k,\ell]}$ denotes the word $w_k w_{k+1} \cdots w_\ell$. The set of n -length words over Σ is denoted Σ^n , and that of infinite words is Σ^ω . By convention, the empty word ε is the unique word of length 0. The free monoid generated by Σ is defined by $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$, and $\Sigma^\infty = \Sigma^\omega \cup \Sigma^*$. Given a word $w \in \Sigma^\infty$, a factor u of w is a word $u \in \Sigma^*$ such that $w = xuy$, for some $x \in \Sigma^*$, and $y \in \Sigma^\infty$. If $x = \varepsilon$ (resp. $y = \varepsilon$) then u is called a prefix (resp. suffix). The set of all factors of w is denoted by $\text{Fact}(w)$, those of length n is $\text{Fact}_n(w) = \text{Fact}(w) \cap \Sigma^n$, and $\text{Pref}(w)$ is the set of all prefixes of w . If $w = pu$, with $|w| = n$ and $|p| = k$, then $p^{-1}w = w_{[k,n-1]} = u$ is the word obtained by erasing the prefix p from w . An occurrence of u in w is a position k such that $u = w_{[k,k+|u|-1]}$, the set of all its occurrences is $\text{Occ}(u, w)$. The number of occurrences of u in w is denoted by $|w|_u$. An infinite word is periodic if there exists a positive integer p such that $w[i] = w[i+p]$, for all i . An infinite word w is recurrent if every factor u of w satisfies $|w|_u = \infty$.

The reversal of $u = u_1 u_2 \cdots u_n \in \Sigma^n$ is the word $\tilde{u} = u_n u_{n-1} \cdots u_1$. A palindrome is a word p such that $p = \tilde{p}$. Every word contains palindromes, the letters and ε being necessarily part of them. For a language $L \subseteq \Sigma^\infty$, the set of its palindromic factors is denoted by $\text{Pal}(L)$. Obviously, the palindromic language is closed under reversal, since $\text{Pal}(L) = \text{Pal}(\tilde{L})$.

Let w be a word, and $u, v \in \text{Fact}(w)$. Then v is a return word of u in w if $vu \in \text{Fact}(w)$, $u \in \text{Pref}(vu)$ and $|vu|_u = 2$. Moreover, vu is a complete return word of u in w . The set of complete return words of u in w is denoted $\text{CRet}_w(u)$. A natural generalization of complete return words consists in allowing the source word to be different from the target word. Let $u, v \in \text{Fact}(w)$. Then $w_{[i,j+|v|-1]}$ is a complete return word from u to v in w if $i \in \text{Occ}(u, w)$ and if j is the first occurrence of v after u , i.e. if j is the minimum of the set of occurrences of v in w strictly greater than i . The set of all complete return words from u to v in w is denoted $\text{CRet}_w(u, v)$. Clearly, $\text{CRet}_w(u, u) = \text{CRet}_w(u)$. From now on, the alphabet is fixed to be $\Sigma = \{0, 1\}$.

2.1. Unit circle

The notation adopted for studying the dynamical system generated by some partially defined rotations on the circle is from Levitt [10]. The circle is identified with \mathbb{R}/\mathbb{Z} , equipped with the natural projection $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} : x \mapsto x + \mathbb{Z}$. The set $A \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ is called an interval of \mathbb{R}/\mathbb{Z} if there exists an interval $B \subseteq \mathbb{R}$ such that $p(B) = A$ (see Fig. 1).

An interval I of \mathbb{R}/\mathbb{Z} is fully determined by the ordered pair of its endpoints, $\partial(I) = \{x, y\}$ where $x \leq y$ or $x \geq y$. The topological closure of I is the closed interval $\bar{I} = I \cup \partial(I)$, and its interior is the open set $\text{Int}(I) = \bar{I} \setminus \partial(I)$.

The basic function on \mathbb{R}/\mathbb{Z} considered in our study is the rotation of angle $\alpha \in \mathbb{R}$, defined by $R_\alpha(x) = x + \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Clearly, R_α is a bijection. As usual, this function is extended to sets of points $R_\alpha(X) = \{R_\alpha(x) : x \in X\}$ and in particular to intervals. Conveniently, the iterates of R_α are defined by $R_\alpha^m(x) = x + m\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, where $m \in \mathbb{Z}$.

2.2. Interval exchange transformations

An interval exchange transformation is a piecewise affine transformation which maps a partition of the space into intervals to another one according to a permutation. Here, the notation is adapted from Keane and Rauzy (see [11,12]).

Let $J, K \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ be two left-closed right-open intervals of the same length λ . Let $q \geq 1$ be an integer and $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$ be a vector with values in \mathbb{R}^+ such that $\sum_{i=1}^q \lambda_i = \lambda$, and let σ be a permutation of the set $\{1, 2, \dots, q\}$. The intervals J and K are partitioned into q sub-intervals as follows. For $1 \leq i \leq q$, define

$$J_i = \left[\sum_{j < i} \lambda_j, \sum_{j \leq i} \lambda_j \right] \quad \text{and} \quad K_i = \left[\sum_{k < \sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma(k)}, \sum_{k \leq \sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma(k)} \right].$$

The q -interval exchange transformation according to σ is a function F such that $F(J_i) = K_i$ and $F|_{J_i}$ is a translation for $i = 1, 2, \dots, q$.

2.3. Poincaré's first return function

Let $J, K \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ be two nonempty left-closed and right-open intervals and let $\alpha \in \mathbb{R}$. Define the map $T_\alpha(J, K)$ by

$$\begin{aligned} T_\alpha(J, K) : J &\rightarrow \mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\} \\ x &\mapsto \inf\{t \in \mathbb{N}^+ \mid x + t\alpha \in K\} \end{aligned}$$

and the map $P_\alpha(J, K)$ by

$$\begin{aligned} P_\alpha(J, K) : J &\rightarrow K \\ x &\mapsto x + T_\alpha(J, K)(x) \cdot \alpha, \end{aligned}$$

The number $T_\alpha(J, K)(x)$ indicates how many rotations of angle α it takes to move from the point x of J to some target point $P_\alpha(J, K)(x)$ in K . The function $P_\alpha(J, K)$ is a natural generalization of the usual Poincaré's first return function (when $J = K$) and is so called as well [5].

Note that it is possible that $T_\alpha(J, K) = +\infty$. Indeed, if α is rational, there is no guarantee that the interval K can be reached from the interval J by rotations of angle α . However, if α is irrational, $T_\alpha(J, K)(x)$ is finite (using a density argument) for all $x \in J$. Also, if $J = K$, then $T_\alpha(J, K)(x) \in \mathbb{N}^+$ for all $x \in J$ for all $\alpha \in \mathbb{R}$, even if α is rational.

Moreover, we recall a well-known result which can be deduced from Keane [11]:

Lemma 1. *The induced map $P_\alpha(J, J)$ of the rotation R_α is an exchange transformation of $r \leq 3$ intervals. Moreover, there exists a decomposition*

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_s, \quad r \leq s \leq 3,$$

into disjoint subintervals and positive integers t_1, t_2, \dots, t_s such that for $x \in J_i$,

$$P_\alpha(J, J)(x) = R_\alpha^{t_i}(x),$$

with R_α continuous on every interval $R_\alpha^{t_k}(J_i)$, $k = 0, 1, \dots, t_i - 1$. \square

To conclude this section, we show that, under some conditions, Poincaré's first return function is an interval exchange transformation. Define the complement of a permutation σ of length n by $\bar{\sigma}(i) = n + 1 - \sigma(i)$, for $i = 1, \dots, n$.

Proposition 2. *Assume that $|J| = |K| \leq \alpha$. Then $P_\alpha(J, K)$ is a bijection if and only if $P_\alpha(J, K)$ is a q -interval exchange transformation of permutation Id_q for some $q \in \{1, 2, 3\}$.*

Proof. Let $P = P_\alpha(J, K)$ and $T = T_\alpha(J, K)$.

(\Leftarrow) By definition of interval-exchange transformation. (\Rightarrow) Consider the image $T(J) \subseteq \mathbb{N}^+$. If $|T(J)| = 1$, then P is a 1-interval exchange transformation, so that one may suppose $|T(J)| \geq 2$.

Let t_1 and t_2 be the two smallest values of $T(J)$ with $t_1 < t_2$ and let $J_i = T^{-1}(t_i)$, $K_i = P(J_i)$ for $i = 1, 2$. The set K_1 is an interval (if $1/2 < |K| \leq \alpha$, then $t_1 = 1$ and K_1 cannot overlap both endpoints of K sharing an endpoint with K . Since $K_1 = K \cap R_\alpha^{t_1}(J)$ and $K_2 = K \cap R_\alpha^{t_2}(J - J_1)$ and since P is a bijection, K_1 and K_2 do not intersect and they both share a distinct endpoint with K . If $|T(J)| = 2$, then $J = J_1 \cup J_2$ and $K = K_1 \cup K_2$, and P is the 2-interval exchange transformation given by J_1 and J_2 of permutation $(2, 1)$.

Suppose now $|T(J)| \geq 3$. Let $t_3 = \min(T(J) - \{t_1, t_2\})$, $J_3 = T^{-1}(t_3)$ and $K_3 = P(J_3) = K \cap R_\alpha^{t_3}(J - (J_1 \cup J_2))$. Since K_3 is non empty and because P is a bijection, then $R_\alpha^{t_3}(J - (J_1 \cup J_2))$ must intersect K in the interval $K - (K_1 \cup K_2)$. But the length of this left-closed right-open interval is $|K - (K_1 \cup K_2)| = |J - (J_1 \cup J_2)|$ so that there is just enough space for it. It follows that $R_\alpha^{t_3}(J - (J_1 \cup J_2)) \subset K$ and thus $K_3 = R_\alpha^{t_3}(J - (J_1 \cup J_2))$. Hence, $J_3 = J - (J_1 \cup J_2)$, $|T(J)| = 3$ and P is the 3-interval exchange transformation given by J_1, J_2 and J_3 of permutation $(3, 2, 1)$. \square

2.4. Coding of rotations

Let $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. The unit circle \mathbb{R}/\mathbb{Z} is partitioned into two nonempty intervals $I_1 = [0, \beta[$ and $I_0 = [\beta, 1[$. Then, a sequence of letters $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\Sigma = \{0, 1\}$ is defined by setting

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{if } R_\alpha^i(x) \in [0, \beta[, \\ 0 & \text{if } R_\alpha^i(x) \in [\beta, 1[, \end{cases}$$

and a sequence of words $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, by $C_n(x) = c_0 c_1 \cdots c_{n-1}$ where $C_0(x) = \varepsilon$. The coding of rotations of x with parameters (α, β) is the infinite word

$$C(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(x).$$

Example 3. If $x = 0.23435636$, $\alpha = 0.222435236$ and $\beta = 0.30234023$, then

$$W_{\text{Example 3}} = C(x) = 10001000110001000110001000110001000110001000110 \dots$$

Example 4. If $x = 0.23435636$, $\alpha = 0.422435236$ and $\beta = 0.30234023$, then

$$W_{\text{Example 4}} = C(x) = 10100001010000100001010000101000010100010100010 \dots$$

It is well-known that $C(x)$ is periodic if and only if α is rational. When α is irrational, with $\beta = \alpha$ or $\beta = 1 - \alpha$, the corresponding coding is a Sturmian word. Otherwise, the case $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ yields Rote words [3], while $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ the quasi-Sturmian words [5,4].

Poincaré's first return function is linked with complete return words as shown by the next lemma.

Lemma 5. Let $u, v \in \text{Fact}(C)$ and $T = T_\alpha(I_u, I_v)$. Then, the set of complete return words from u to v in C is exactly $\{C_{T(\gamma)+|v|}(\gamma) \mid \gamma \in I_u\}$.

Proof. The word w is a complete return word from u to v in C if and only if $w = C_{[j, k+|v|-1]}(j)$, j is an occurrence of u and if k is the first occurrence of v in w strictly greater than j , if and only if there exists $\gamma \in I_w$ such that $\gamma \in I_u$, $R_\alpha^{w-|v|}(\gamma) \in I_v$ and $R_\alpha^i(\gamma) \notin I_v$ for all $0 < i < |w| - |v|$, if and only if there exists $\gamma \in I_w$ such that $\gamma \in I_u$ and $T_\alpha(I_u, I_v)(\gamma) = |w| - |v|$, if and only if there exists $\gamma \in I_u$ such that $w = C_{|w|}(\gamma) = C_{T_\alpha(I_u, I_v)(\gamma)+|v|}(\gamma)$. \square

3. Partitions of the unit circle

Let $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. For each word $w \in \Sigma^*$, the set of points I_w from which the word w is read under rotations by α is:

$$I_w = \{\gamma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid C_{|w|}(\gamma) = w\}.$$

The sets I_w are easily computed from the letters of w and form a partition of the unit circle \mathbb{R}/\mathbb{Z} , explicitly:

$$I_w = \bigcap_{0 \leq i \leq n-1} R_\alpha^{-i}(I_{w_i}) \quad (1)$$

$$P_n = \{I_w \mid w \in \text{Fact}_n(C(\gamma)), \gamma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}. \quad (2)$$

The set of boundary points \mathcal{P}_n of the partition P_n is

$$\mathcal{P}_n = \bigcup_{I \in P_n} \partial(I).$$

Trivially, when $n = 1$, $\mathcal{P}_1 = \partial(I_0) \cup \partial(I_1) = \{0, \beta\}$ and it can be shown more generally that

$$\mathcal{P}_n = \{-i\alpha \mid i = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{\beta - i\alpha \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

The partitions P_1, P_2 and P_3 for $W_{\text{Example 3}}$ are represented in Fig. 2 whereas those of $W_{\text{Example 4}}$ are illustrated in Fig. 3. Note that in the second case, I_{00} and I_{000} are not intervals. The proof of the main result of this paper is precisely based on two cases: whether I_w is an interval (Case 1) or not (Case 2). First, Lemma 1 implies the following result.

Lemma 6. Let $w \in \Sigma^*$ be such that I_w is an interval. Then

- (i) $P_\alpha(I_w, I_w)$ is a q -interval exchange transformation, where $q \in \{1, 2, 3\}$.
- (ii) w has at most 3 complete return words.

The following lemma is technical and is useful for our goal.

Lemma 7. Let E be a finite set. Let $(A_i)_{i \in E}$ be a family of left-closed and right-open intervals $A_i \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Let $\ell = \min\{|A_i| : i \in E\}$ and $L = \max\{|A_i| : i \in E\}$. If $\ell + L \leq -1$, then $\bigcap_{i \in E} A_i$ is an interval.

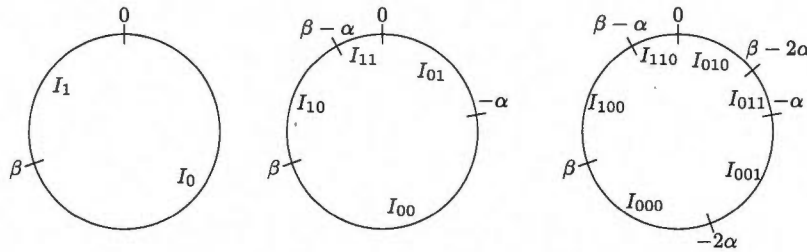


Fig. 2. Representation of the partitions P_1, P_2 and P_3 of $\mathbf{W}_{\text{Example 3}}$.

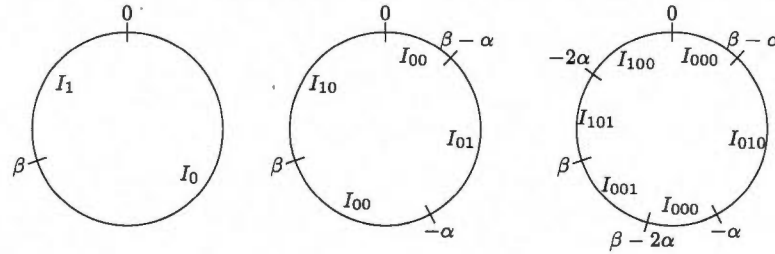


Fig. 3. Representation of the partitions P_1, P_2 and P_3 of $\mathbf{W}_{\text{Example 4}}$.

Proof. The proof proceeds by induction on n . If $n = 1$, there is nothing to prove. Otherwise, let $k \in E$ be such that $|A_k| = L = \max\{|A_i| : i \in E\}$ and $\ell = \min\{|A_i| : i \in E\}$. Then

$$\bigcap_{i \in E} A_i = A_k \cap \left(\bigcap_{i \in E \setminus \{k\}} A_i \right).$$

By the induction hypothesis, $\bigcap_{i \in E \setminus \{k\}} A_i$ is an interval and its length is less than ℓ . Since $\ell + L \leq 1$, A_i and $\bigcap_{i \in E} A_i$ cannot intersect on both of their endpoints at the same time. \square

Under some mild condition, it is guaranteed that the set I_w is an interval. This elementary result is provided for sake of completeness.

Lemma 8. Let $w \in \Sigma^*$, and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. The following properties hold:

- (i) If both letters 0 and 1 appear in w , then I_w is an interval and $|I_w| \leq \alpha$;
- (ii) If $\alpha < \beta$ and $\alpha < 1 - \beta$, then I_w is an interval.

Proof. (i) Let $L = \{|R_\alpha^{-i}(I_{w_i})| : 0 \leq i \leq n-1\}$. If both letters 0 and 1 appear in the word w then $L = \{\beta, 1 - \beta\}$ so that $\min L + \max L = 1$. Therefore, the intersection of intervals of Eq. (1) satisfies the criteria of Lemma 7 and hence I_w is an interval.

The factor 01 or the factor 10 must appear in w . In the first case, the length of I_w is bounded: $|I_w| \leq |I_{01}| = |R_\alpha(I_0) \cup R_\alpha^{-1}(I_1)| \leq \alpha$. A similar inequality is obtained for the factor 10.

(ii) We prove the contrapositive. Assume that there exist a positive integer n and a word $w \in \text{Fact}_n(\mathbb{C})$ such that I_w is an interval while I_{wa} is not, for some letter a . It follows from (i) that $w = a^n$ and $|I_a| > |I_b|$. However, Eq. (1) implies $I_w = \bigcap_{i=0}^{n-1} R_\alpha^{-i}(I_a)$. In particular, $I_w \subseteq R_\alpha^{-n+1}(I_a)$ so that

$$R_\alpha^{-n+1}(I_b) \subseteq [0, 1] \setminus I_w.$$

Moreover, $I_{wa} = I_w \cap R_\alpha^{-n}(I_a)$ and hence $R_\alpha^{-n}(I_b) \subseteq I_w$. It follows that $R_\alpha^{-n+1}(I_b) \cap R_\alpha^{-n}(I_b) = \emptyset$, $R_\alpha(I_b) \cap I_b = \emptyset$ and $\alpha \geq |I_b| = \min\{\beta, 1 - \beta\}$. \square

3.1. Symmetry of the partition

In [13], the authors used the global symmetry of the partition \mathcal{P}_n , sending the interval I_w on the interval $I_{\tilde{w}}$. In fact, there are two points y_n and y'_n such that $2 \cdot y_n = 2 \cdot y'_n = \beta - (n-1)\alpha$, and the symmetry S_n of \mathbb{R}/\mathbb{Z} is defined by $x \mapsto 2y_n - x$. This symmetry is useful for describing the structure of return words as illustrated in Fig. 4.

Lemma 9. Let $m \in \mathbb{N}$. The following properties hold.

- (i) If $S_n(x) = R_\alpha^m(x)$, then $S_n(x + \alpha) = R_\alpha^{m-1}(x)$.
- (ii) If $x \in \text{Int}(I_w)$, then $S_n(x) \in I_{\tilde{w}}$.
- (iii) Assume that $x + \ell \cdot \alpha \notin \mathcal{P}_n$ for all $0 \leq \ell \leq m$. If $S_n(x) = R_\alpha^m(x)$, then $\mathbf{C}_{n+m}(x)$ is a palindrome.

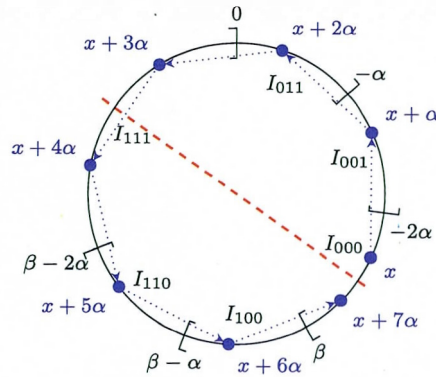


Fig. 4. Let $\alpha = 0.135$ and $\beta = 0.578$. The orbit of the point $x = (\beta - 9\alpha)/2 = 0.6815$ is symmetric with respect to $S_3 : x \mapsto \beta - 2\alpha - x$. In fact, one may verify that the points x and $x + 7\alpha$ satisfy $S_3(x) = x + 7\alpha$ and that $C_{10}(x) = 000111000$ is a palindrome.

Proof. (i) One has

$$\begin{aligned} S_n(x + \alpha) &= 2y_n - x - \alpha = S_n(x) - \alpha \\ &= x + m\alpha - \alpha = x + (m - 1)\alpha. \end{aligned}$$

(ii) This follows from the definition of S_n . (iii) In any case, one may suppose that $x \in I_w$ where $|w| = n$. The proof is done by induction on m . If $m = 0$, then $x \in I_{\tilde{w}}$ from (ii) so that $w = \tilde{w} = C_{n+0}(x)$. If $m = 1$, then $x + \alpha \in I_{\tilde{w}}$ from (ii). Hence, $C_{n+1}(x) = a\tilde{w} = wb$ where $a, b \in \{0, 1\}$. Clearly, $a = w_0 = b$ and $C_{n+1}(x)$ is a palindrome. In general, for $m \geq 2$, $C_{m+n}(x) = a \cdot C_{m+n-2}(x + \alpha) \cdot b$ where $a = w_0 = b$ since a is the first letter of w and b is the last letter of \tilde{w} . From (i), we know that $S_n(x + \alpha) = (x + \alpha) + (m - 2)\alpha$ so that $C_{m+n-2}(x + \alpha)$ is a palindrome by the induction hypothesis. \square

4. Main results

We describe now the relation between dynamical systems and coding of rotations on two intervals by computing the complete return words of $C(x)$ using Poincaré's first return function as follows. The key idea is to establish that every complete return word of a palindrome is itself a palindrome. For that purpose, assume that $u \in \text{Pal}(C)$ where $C = C(x)$ is such a coding. There are two cases to consider according to whether I_u is an interval or not.

4.1. Case 1 : I_u is an interval

Recall from Lemma 6 that $P_\alpha(I_u, I_u)$ is a q -interval exchange transformation with $q \in \{1, 2, 3\}$. Let $(J_i)_{1 \leq i \leq q \leq 3}$ be the q nonempty and maximal sub-intervals of I_u such that $P_\alpha(I_u, I_u)(J_i) = R_\alpha^{t_i}(J_i)$ where $i < j$ implies $t_i < t_j$. Any point of J_i requires the same number t_i of rotations by α to reach the interval I_u . In the general case, two points in J_i may code different words of length t_i under rotations by α . For example, the factor 100 has three complete return words in $\mathbf{W}_{\text{Example 3}}$ among which two have the same length: 10000100, 1000100, 10001100.

Nevertheless, the next lemma ensures the uniqueness of the return word of length t_i obtained from the interval J_i in the case where I_u is an interval.

Lemma 10. If I_u is an interval, then for all $x, y \in J_i$ and $1 \leq i \leq q$ one has $C_{t_i}(x) = C_{t_i}(y)$.

Proof. Without loss of generality one may assume that $x < y$. By contradiction, suppose that there exists $k, 0 \leq k \leq t_i$, such that $R_\alpha^k(x)$ lies in $I_0 = [0, \beta[$ and $R_\alpha^k(y)$ lies in $I_1 = [\beta, 0[$ (the proof is the same for the other case). Then,

$$\beta \in]R_\alpha^k(x), R_\alpha^k(y)] \subset R_\alpha^k(\text{Int}(J_i)).$$

If $k < n$, then $\beta - k\alpha \in \text{Int}(J_i)$ which is a contradiction because it is a point of the set \mathcal{P}_n . If $k \geq n$, then $\beta - \ell\alpha \in R_\alpha^{k-\ell}(\text{Int}(J_i))$ for all $0 \leq \ell < n$. This is a contradiction as well because at least one of the boundary points of I_u is of the form $\beta - \ell\alpha$ which contradicts the minimality of t_i . \square

A well-chosen representative allows one to compute the word coded from the interval J_i . It appears that the middle point m_i of J_i is convenient for being symmetric: indeed, it follows from Lemma 5 and Lemma 10 that if $u \in \text{Fact}_n(C)$ is a palindrome such that I_u is an interval, then

$$\text{CRet}_C(u, u) = \{C_{t_i+n}(m_i) \mid 1 \leq i \leq q\}. \quad (3)$$

Proposition 11. If I_u is an interval then every complete return word of u is a palindrome.

Proof. Let $n = |u|$ and $w \in \text{CRet}_C(u)$. Since I_u is an interval, there exists $i \in \{1, 2, 3\}$ such that $w = C_{T(m_i)+n}(m_i)$ where $T = T_\alpha(I_u, I_u)$ and m_i is the middle point of the interval J_i , for $i = 1, 2, 3$. Let $\sigma_i : \gamma \mapsto 2m_i - \gamma$ denote the reflection with respect to the middle point m_i of the sub-interval J_i . Moreover, since $P_\alpha(I_u, I_u)$ is an interval exchange transformation, the following equalities hold

$$m_i + T(m_i)\alpha = P_\alpha(I_u, I_u)(m_i) = (S_n \circ \sigma_i)(m_i) = S_n(m_i).$$

From Lemma 10, we know that none of the points $m_i + \ell \cdot \alpha$ are in \mathcal{P}_n so that Lemma 9(iii) can be applied, and w is a palindrome. \square

4.2. Case 2 : I_u is not an interval

In this case Lemma 8 implies that $u = a^n$ is some power of a single letter. Then every complete return word of u is either (i) of the form a^{n+1} or (ii) belongs to the set $a^n b \Sigma^* \cap \Sigma^* b a^n$, with $a \neq b$. The first case is trivial because a^{n+1} is clearly a palindrome, so only the second case is described in detail.

Proposition 12. *If $u' = a^n b$ and $v' = b a^n$ then $P_\alpha(I_{u'}, I_{v'})$ is a bijection.*

Proof. It suffices to show that $P_{-\alpha}(I_{v'}, I_{u'})$ is the inverse of $P_\alpha(I_{u'}, I_{v'})$. By contradiction, assume that it is not the case. Then there exist $x \in I_{u'}$ and $y \in I_{v'}$ such that $y = P_\alpha(I_{u'}, I_{v'})(x)$ and $T_{-\alpha}(I_{v'}, I_{u'})(y) < T_\alpha(I_{u'}, I_{v'})(x)$, i.e. the orbit of y falls within $I_{u'}$ before reaching x when making rotations of $-\alpha$. Therefore, by Lemma 5, there exists a complete return word w from $u' = a^n b$ to $v' = b a^n$ such that u' occurs twice in w . But this implies that v' occurs twice in w as well, which contradicts the definition of complete return word. \square

Corollary 13. *If $u' = a^n b$ and $v' = b a^n$ then $P_\alpha(I_{u'}, I_{v'})$ is a q -interval exchange transformation, where $q \in \{1, 2, 3\}$. \square*

Let $(J_i)_{1 \leq i \leq q}$ be the q nonempty sub-intervals of $I_{u'}$ as defined in the proof of Proposition 2. It follows from the preceding lemmas that any point of J_i requires the same number of rotations by α to reach the interval $I_{v'}$, i.e. $T_\alpha(I_{u'}, I_{v'})(x) = T_\alpha(I_{u'}, I_{v'})(y)$ for all $x, y \in J_i$. Hence, for $1 \leq i \leq q$, let

$$t_i = T_\alpha(I_{u'}, I_{v'})(J_i). \quad (4)$$

As pointed out above, two points in the interval J_i might code different words of length t_i under rotations by α . Nevertheless, the uniqueness of the return word obtained from the interval J_i is ensured in our case.

Lemma 14. *If $u' = a^n b$ and $v' = b a^n$, then for all $x, y \in J_i$ and $1 \leq i \leq q$ one has $C_{t_i}(x) = C_{t_i}(y)$ where t_i is defined by Eq. (4).*

Proof. Without loss of generality one may assume that $x < y$. By contradiction, suppose that there exists $k, 0 \leq k \leq t_i$, such that $R_\alpha^k(x)$ lies in $I_0 = [0, \beta[$ and $R_\alpha^k(y)$ lies in $I_1 = [\beta, 0[$ (the proof is the same for the other case). Then,

$$\beta \in]R_\alpha^k(x), R_\alpha^k(y)] \subset R_\alpha^k(\text{Int}(J_i)).$$

If $k \leq n$, then $\beta - k\alpha \in \text{Int}(J_i)$ which is a contradiction because it is a point of the set \mathcal{P}_{n+1} . If $k > n$, then $\beta - \ell\alpha \in R_\alpha^{k-\ell}(\text{Int}(J_i))$ for all $0 \leq \ell \leq n$. This is a contradiction as well because at least one of the boundary points of $I_{u'}$ or $I_{v'}$ is of the form $\beta - \ell\alpha$ which contradicts the fact that $P_\alpha(I_{u'}, I_{v'})$ is a bijection. \square

Once again, we choose the middle point m_i as representative. It follows from Lemma 5 and Lemma 14 that if $u' = a^n b$ and $v' = b a^n$, then

$$\text{CRet}_C(u', v') = \{C_{t_i+n+1}(m_i) \mid 1 \leq i \leq q\}. \quad (5)$$

Proposition 15. *Let $T = T_\alpha(I_{a^n b}, I_{b a^n})$. Then,*

$$\text{CRet}(a^n) \subseteq \{a^{n+1}\} \cup \{C_{T(m_i)+n+1}(m_i) \mid 1 \leq i \leq q\}.$$

Proof. Let $us \in \text{CRet}(u)$ and let b be the first letter of s . If $b = a$, then $us = ua = a^{n+1}$. If $b \neq a$, then $us = ubtu = a^n bta^n$ where the last letter of bt must be b : these are the complete return words from $a^n b$ to $b a^n$ as given by Eq. (5). \square

Proposition 16. *If I_u is not an interval then every complete return word of u is a palindrome.*

Proof. Let $n = |u|$ and let $w \in \text{CRet}_C(u)$. Since I_u is not an interval, $u = a^n$ with $a \in \{0, 1\}$ by Lemma 8. Proposition 15 implies that $w = a^{n+1}$ which is a palindrome or $w = C_{T(m_i)+n+1}(m_i)$ where $T = T_\alpha(I_{a^n b}, I_{b a^n})$. Again, let $\sigma_i : \gamma \mapsto 2m_i - \gamma$ denote the reflection with respect to the middle point m_i of the sub-interval J_i . Then

$$m_i + T(m_i)\alpha = P_\alpha(I_{a^n b}, I_{b a^n})(m_i) = (S_{n+1} \circ \sigma_i)(m_i) = S_{n+1}(m_i).$$

so that w is a palindrome by Lemma 9(iii). \square

4.3. Concluding statements

First, it is worth mentioning that a slight technical refinement of Katok's results is obtained from Lemma 10 and Proposition 15.

Proposition 17. *The set of words $w \in \text{Fact}(\mathbb{C})$ having 4 complete return words is finite. Moreover, I_w is not an interval and w is the power of a single letter.*

This result is illustrated in the following example.

Example 18. The factor 000 has four complete return words in $\mathbf{W}_{\text{Example 4}}$ namely

0000, 0001000, 000101000 and 00010100101000

all being palindromes.

This example illustrates that complete return words of palindromes are palindromes, a consequence of Propositions 11 and 16. In other words:

Theorem 19. Every coding of rotations on two intervals is full. \square

In [14], the authors showed that an infinite word w whose set of factors is closed under reversal is full if and only if

$$\text{Pal}_n(w) + \text{Pal}_{n+1}(w) = \text{Fact}_{n+1}(w) - \text{Fact}_n(w) + 2 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Since Eq. (6) is verified for the case where the number of return words is at most 3, it is likely that Theorem 19 could be deduced from results in [14]. However, it is not clear if this also holds for the more involved case where the bound of 4 return words is realized. Here all possible cases were handled, including the periodic one.

Note. The fact that the number of (complete) return words is bounded by 3 when $\alpha < \min\{\beta, 1 - \beta\}$ can be found in the work of Keane [11], Rauzy [12] or Adamczewski [5] with α irrational. Moreover, it was already known that $|\text{CRet}(w)| = k$ for a non degenerate interval exchange on k intervals [15] and that $|\text{CRet}(w)| = 2$ for a coding of rotations with $\alpha = \beta$ (the Sturmian case). Nevertheless, the proofs provided here hold for any values of α and β , taking into account rational values as well.

5. Complementary-symmetric Rote words

The special case when $\beta = 1/2$ deserves some attention. These words built on the alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ are called *complementary-symmetric Rote words* [3]. We provide here a combinatorial proof for the case where α is irrational and $\beta = 1/2$, based on the peculiar structure of antipalindromes, a generalization of palindromes.

An *antipalindrome* q is a word such that $\bar{q} = \tilde{q}$ where $\bar{\cdot}$ is the non trivial involution on Σ^* (swapping of letters) defined by $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$. Given two palindromes p and q , one writes $p < q$ if there exists a word x such that $x^{-1}q = p\tilde{x}$ or equivalently $q = xp\tilde{x}$. The *difference* of w , denoted by $\Delta(w)$, is the word $v = v_1v_2 \cdots v_{|w|-1}$ defined by

$$v_i = (w_{i+1} - w_i) \bmod 2, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, |w| - 1.$$

Complementary-symmetric words are connected to Sturmian words by a structural theorem.

Theorem 20 (Rote [3]). *An infinite word \mathbf{w} is a complementary-symmetric Rote word if and only if the infinite word $\Delta(\mathbf{w})$ is a Sturmian word.*

For instance, the following word is complementary-symmetric

$$x = 1100011000110011100111001110011000 \dots$$

and its associated Sturmian word is

$$\begin{aligned} y &= \Delta(1110000001111000) \dots \\ &= 01001010010101001010010100101001 \dots \end{aligned}$$

The key idea is to exploit the link with Sturmian words and to use both palindromes and antipalindromes. First, we state without proof some elementary properties of the operator Δ .

Lemma 21. *Let $u, v \in \Sigma^*$, where $|u|, |v| \geq 2$. Then*

- (i) $\Delta(u) = \Delta(v)$ if and only if $v = u$ or $v = \bar{u}$,
- (ii) u is either a palindrome or an antipalindrome if and only if $\Delta(u)$ is a palindrome and
- (iii) u is an antipalindrome if and only if $\Delta(u)$ is an odd palindrome with central letter 1.

The following fact, established in [16,17], is useful.

Theorem 22. *A binary word \mathbf{w} is Sturmian if and only if every nonempty factor u of \mathbf{w} satisfies $|\text{CRet}_{\mathbf{w}}(u)| = 2$.*

The lattice of palindrome factors of Sturmian words has the following factorial closure property.

Lemma 23. *Let s be a Sturmian word and $p, q \in \text{Pal}(s)$, where $|p| \geq |q|$. Assume that there exists a nonempty word r such that $r < p$ and $r < q$. Then $q < p$.*

Proof. The proof proceeds by contradiction. Assume that $q \not< p$ and let r' be the longest palindrome such that $r' < p, q$. Clearly, $r' \neq \varepsilon$ since $r \neq \varepsilon$. Moreover, $r' \neq p, q$ since $q \not< p$. Therefore, there exist two distinct letters a and b such that $ar'a < p$ and $br'b < q$, i.e. $ar'a$ and $br'b$ are both factors of s . This is a contradiction with the balance property of Sturmian words, since $|ar'a|_a - |br'b|_a = 2 > 1$. \square

A last lemma is useful to prove Theorem 25.

Lemma 24. Let \mathbf{r} be a complementary-symmetric Rote word and $u \in \text{Pal}(\mathbf{r})$. Then there exist a palindrome p and an antipalindrome q such that $u \in \text{Pref}(p) \cap \text{Pref}(q)$ and

$$\text{CRet}_{\mathbf{r}}(\Delta(u)) = \{\Delta(p), \Delta(q)\}.$$

Proof. From Theorem 20, we know that $\Delta(\mathbf{r})$ is Sturmian and from Lemma 21 that $\Delta(u)$ is a palindrome. Therefore, it follows from Theorem 22 that $\Delta(u)$ has two complete return words. Moreover, since $\Delta(\mathbf{r})$ is full, these two complete return words are palindromes.

Let p and q be the two words such that $u \in \text{Pref}(p) \cap \text{Pref}(q)$ and

$$\text{CRet}_{\mathbf{r}}(\Delta(u)) = \{\Delta(p), \Delta(q)\}.$$

By Lemma 21(i), p and q are indeed unique and it follows from Lemma 21(ii) that p and q are either palindromes or antipalindromes.

First, one shows that p and q cannot be both antipalindromes. Arguing by contradiction, assume that the contrary holds. Then $\Delta(p)$ and $\Delta(q)$ are both palindromes of odd length having 1 as a central factor. By Lemma 23, one concludes that $\Delta(p) < \Delta(q)$ or $\Delta(q) < \Delta(p)$. The former case implies $|\Delta(q)|_{\Delta(u)} \geq 4$ while the latter implies $|\Delta(p)|_{\Delta(u)} \geq 4$, contradicting the fact that $\Delta(p)$ and $\Delta(q)$ are complete return words.

It remains to show that p and q cannot be both palindromes. Since \mathbf{r} is recurrent for being Sturmian, there exists $v \in \text{Fact}(\mathbf{r})$ such that $u \in \text{Pref}(v)$, $\bar{u} \in \text{Suff}(v)$ and $|v|_u = |v|_{\bar{u}} = 1$, i.e. $\Delta(v)$ is a complete return word of $\Delta(u)$ in $\Delta(\mathbf{r})$. But v is not a palindrome since $u \in \text{Pref}(v)$ and $\bar{u} \in \text{Suff}(v)$, so that it must be an antipalindrome. \square

As a consequence the fullness property holds.

Theorem 25. Rote words with $\beta = 1/2$ are full.

Proof. Let \mathbf{r} be a Rote sequence, $u \in \text{Pal}(\mathbf{r})$ and v a complete return word of u in \mathbf{r} . It suffices to show that v is a palindrome.

First, note that $|v|_u = 2$ but it is possible to have $|v|_{\bar{u}} > 0$. Let $n = |v|_{\bar{u}}$. By Lemma 24, there exist a palindrome p and an antipalindrome q such that $\Delta(p)$ and $\Delta(q)$ are the two complete return words of $\Delta(u)$ in \mathbf{r} , where $u \in \text{Pref}(p) \cap \text{Pref}(q)$. If $n = 0$, then $v = p$ is a palindrome, as desired. Otherwise,

$$v = (qu^{-1})(\bar{p}u^{-1})^n \bar{q}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \tilde{q}(\tilde{u}^{-1}\tilde{p})^n(\tilde{u}^{-1}\tilde{q}) \\ &= q(u^{-1}\bar{p})^n(u^{-1}\bar{q}) = v, \end{aligned}$$

so that v is a palindrome. Hence, \mathbf{r} is full. \square

Acknowledgements

This paper is an extended version of a communication that appeared in [18]. The results presented in this paper were discovered by computer exploration using the open-source mathematical software Sage [19]. We are also grateful to the anonymous referees for pointing out crucial points that improved the presentation.

This research was supported by NSERC (Canada) and FQRNT (Quebec).

References

- [1] P. Alessandri, V. Berthé, Three distance theorems and combinatorics on words, *Enseign. Math.* 44 (1998) 103–132.
- [2] J. Berstel, P. Séébold, Sturmian words, in: Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.
- [3] G. Rote, Sequences with subword complexity $2n$, *J. Number Theory* 46 (1994) 196–213.
- [4] G. Didier, Codages de rotations et fractions continues, *J. Number Theory* 71 (1998) 275–306.
- [5] B. Adamczewski, Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité, *J. Théorie des nombres de Bordeaux* 14 (2002) 351–386.
- [6] X. Droubay, J. Justin, G. Pirillo, Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy, *Theoret. Comput. Sci.* 255 (2001) 539–553.
- [7] S. Brlek, S. Hamel, M. Nivat, C. Reutenauer, On the palindromic complexity of infinite words, *Int. J. Found. Comput. Sci.* 15 (2004) 293–306.
- [8] A. Glen, J. Justin, S. Widmer, L.Q. Zamboni, Palindromic richness, *Eur. J. Comb.* 30 (2009) 510–531.
- [9] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, 1983.
- [10] G. Levitt, La dynamique des pseudogroupes de rotations, *Inventiones mathematicae* 113 (1993) 633–670.
- [11] M. Keane, Interval exchange transformations, *Math. Z.* 141 (1975) 25–31.
- [12] G. Rauzy, Echange d'intervalles et transformations induites, *Acta. Arith.* 34 (1979) 315–328.
- [13] V. Berthé, L. Vuillon, Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences, *J. of Automata, Languages and Combin.* 6 (2001) 121–138.
- [14] M. Bucci, A. De Luca, A. Glen, L.Q. Zamboni, A connection between palindromic and factor complexity using return words, *Adv. in Appl. Math.* 42 (2009) 60–74.
- [15] L. Vuillon, On the number of return words in infinite words constructed by interval exchange transformations, *PU.M.A.* 18 (2007) 345–355.
- [16] J. Justin, L. Vuillon, Return words in Sturmian and episturmian words, *RAIRO Theoretical Informatics and Applications* 34 (2000) 343–356.
- [17] L. Vuillon, A characterization of Sturmian words by return words, *Eur. J. Combin.* 22 (2001) 263–275.
- [18] A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé, L. Vuillon, Codings of rotations on two intervals are full, in: J. Nešetřil, A. Raspaud (Eds.), *EuroComb 2009*, 7th International Conference on Words, vol. 34, pp. 289–293.
- [19] W. Stein, et al. *Sage Mathematics Software (Version 4.3.3)*, The Sage Development Team, 2010. <http://www.sagemath.org>.

3.2 Quatre classes de complexité palindromique

Le défaut $D(\mathbf{w})$ et la complexité palindromique $|\text{Pal}(\mathbf{w})|$ permettent de diviser les mots infinis \mathbf{w} en quatre classes : soit un mot infini est plein (comme le mot de Fibonacci, les mots sturmiens et les codages de rotation sur deux intervalles), soit son défaut est borné et non nul, soit son défaut est infini et sa complexité palindromique est aussi infinie, soit son défaut est infini et sa complexité palindromique est finie. Les quatre classes sont représentées dans le Tableau 3.1 et la Figure 3.1. Comme on le verra dans les sections

$ \text{Pal}(\mathbf{w}) $	$D(\mathbf{w})$	Exemples
∞	0	mots sturmiens, codages de rotations sur 2 intervalles
∞	$0 < D(\mathbf{w}) < \infty$	$(aababbaabbabaa)^\omega$ dont le défaut est 1.
∞	∞	mot de Thue-Morse
fini	∞	Point fixe de $a \mapsto abb, b \mapsto ba$

Tableau 3.1 Les quatre classes de complexité palindromique.

suivantes, $(aababbaabbabaa)^\omega$ est un mot dont le défaut est 1 (Blondin Massé et al., 2008). Le défaut du mot de Thue-Morse est infini et sa complexité palindromique est infinie. Puis, le point fixe du morphisme $a \mapsto abb, b \mapsto ba$ génère un langage ayant un nombre fini de palindromes.

3.3 Conjecture de Hof, Knill et Simon

Au sujet des mots dont la complexité palindromique est infinie, il est pertinent d'énoncer la conjecture que Hof, Knill et Simon ont énoncé en 1995. On dit d'un morphisme φ qu'il est de classe \mathcal{P} s'il existe un palindrome p tel que pour chaque $\alpha \in \Sigma$ il existe un palindrome q_α tels que $\varphi(\alpha) = pq_\alpha$ (Hof, Knill et Simon, 1995). Voici la conjecture qu'ils ont énoncée (modifiée pour inclure les morphismes conjugués).

Conjecture 3.9. (Hof, Knill et Simon, 1995) *Soit \mathbf{u} un point fixe de morphisme primitif. Alors, $|\text{Pal}(\mathbf{u})| = \infty$ si et seulement s'il existe un morphisme φ tel que $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ et φ est conjugué à un morphisme de classe \mathcal{P} .*

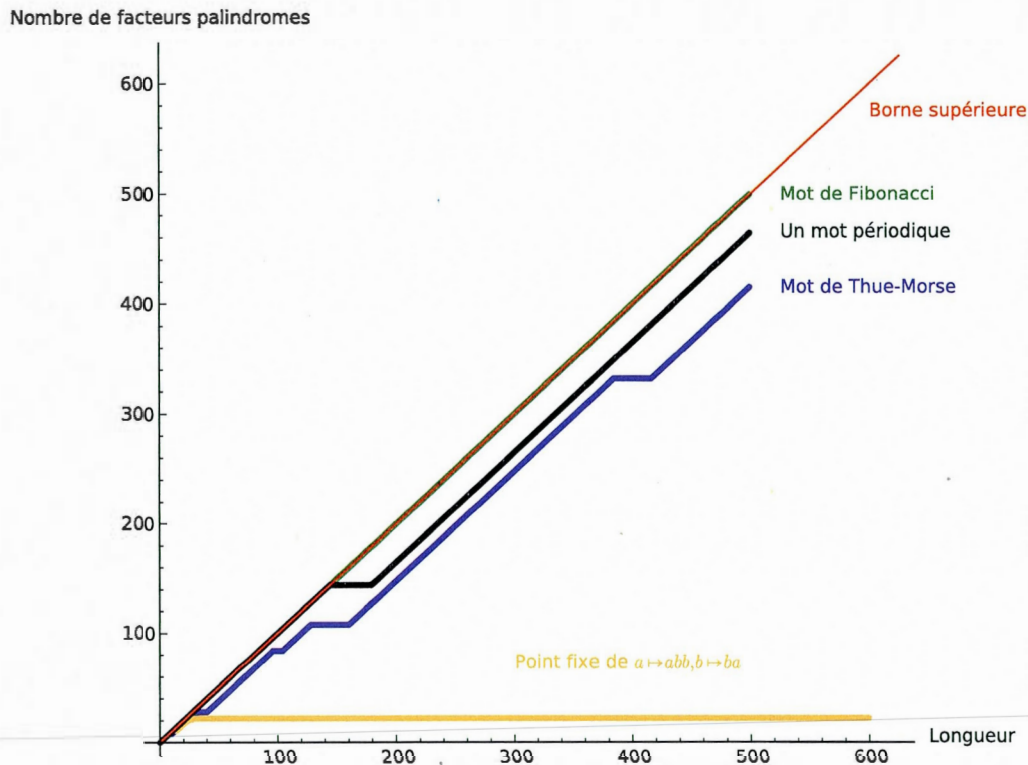


Figure 3.1 Graphe du nombre de palindromes de mots représentatifs des quatres classes de complexité palindromique.

Cette conjecture a été considérée dans les travaux suivants : (Allouche et al., 2003; Glen et al., 2009). Cette question a été considérée dans le mémoire de maîtrise (Labbé, 2008) où la conjecture a été démontrée pour les morphismes uniformes sur un alphabet binaire :

Théorème 3.10. (Labbé, 2008) *Soient $\Sigma = \{a, b\}$, $\varphi : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ un morphisme primitif uniforme et $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$ un point fixe. Alors, \mathbf{u} contient des palindromes arbitrairement longs si et seulement si φ , $\tilde{\varphi}$ ou φ^2 est de classe \mathcal{P} .*

À la même période, (Tan, 2007) présentait une démonstration de la Conjecture 3.9 complètement différente de la mienne pour un alphabet à deux lettres et pour les morphismes non nécessairement uniformes. Ainsi, le résultat de Tan s'applique dans trois des quatres sections suivantes où nous présentons les quatre classes de complexité palindromique (dont trois sont infinies).

3.4 Mots pleins

Dans cette section, nous considérons les mots pleins en rappelant les résultats connus, tant sur les mots finis que infinis. D'abord, remarquons qu'il existe une série d'équivalences au fait d'être plein qui s'ajoutent au Lemme 3.6 et qui découlent de la définition.

Théorème 3.11. (Brlek et al., 2004; Glen et al., 2009) *Soit Σ un alphabet et $w \in \Sigma^* \cup \Sigma^{\mathbb{N}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *w est plein ;*
- (ii) *tous les facteurs de w sont pleins ;*
- (iii) *chaque préfixe (resp. suffixe) de w a un palindrome suffixe (resp. préfixe) unioccurrent ;*
- (iv) *pour tout palindrome p de w , chaque mot de retour complet de p dans w est un palindrome ;*
- (v) *le plus long palindrome suffixe de chaque facteur u de w est unioccurrent dans u .*

Parmi les mots d'une longueur fixée, quelle est la proportion de mots pleins ? Est-ce que les mots pleins sont rares ou fréquents ? Pour répondre à ces questions, nous définissons la fonction suivante qui compte le nombre de mots pleins de longueur n sur un alphabet Σ de m lettres :

$$F_m(n) = |\{w \in \Sigma^n : w \text{ est plein}\}|.$$

Les premières valeurs de $F_m(n)$ pour les alphabets de $m = 2, 3, 4$ et 5 lettres sont indiquées dans le Tableau 3.2. Elles suggèrent que les mots pleins sont plutôt fréquents lorsque la longueur n est petite. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Lemme 3.12. *Soit $w \in \Sigma^*$. Si $|w| \leq 3$, alors w est plein. Si $|\Sigma| = 2$ et $|w| \leq 7$, alors w est plein.*

Démonstration. Pour les mots sur un alphabet à deux lettres, la démonstration est effectuée expérimentalement à l'Exemple Sage 3.13. On y vérifie que les mots sur un alphabet de deux lettres de longueur au plus 7 sont pleins.

n	$F_2(n)$	$F_3(n)$	$F_4(n)$	$F_5(n)$
0	1	1	1	1
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	75	232	565
5	32	201	784	2345
6	64	513	2464	8905
7	128	1269	7336	31 505
8	252	3033	20 776	104 625
9	488	7047	56 464	329 525
10	932	15 903	147 808	
11	1756	35 031	374 368	
12	3246	75 291	919 924	
13	5916	158 487		
14	10 618	326 889		
15	18 800			
16	32 846			
17	56 704			
18	96 702			
19	163 184			
20	272 460			
21	450 586			

Tableau 3.2 Nombre de mots pleins sur un alphabet de 2, 3, 4 ou 5 lettres selon la longueur n .

Supposons que $|w| \leq 3$. Si w contient deux lettres distinctes, alors le paragraphe précédent montre que w est plein. Si w contient plus que deux lettres distinctes, alors w est de la forme abc où a , b et c sont des lettres. Or, $\text{Pal}(abc) = \{\varepsilon, a, b, c\}$, Cela achève de montrer que tous les mots de longueur au plus 3 sont pleins. \square

Exemple Sage 3.13.

Dans ce calcul, on vérifie que tous les mots de longueur n sur l'alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ sont pleins pour les valeurs de $n = 0, 1, \dots, 7$.

```
sage: W = Words('ab')
sage: for n in range(10):
.....:     print n, all(w.is_full() for w in W.iterate_by_length(n))
```



```

...:
0 True
1 True
2 True
3 True
4 True
5 True
6 True
7 True
8 False
9 False

```

Parmi les mots de longueur 8 sur un alphabet à deux lettres, $F_2(8) = 252$ sont pleins et seulement 4 ne le sont pas. Il s'agit des mots suivants :

aababbaa, aabbabaa, bbaababb, bbabaabb.

On remarque notamment que le mot de retour complet de *aa* dans *aababbaa* est *aababbaa* qui n'est pas un palindrome. Bien sûr, plus n est grand, plus la probabilité de contenir un de ces quatre facteurs est grande et donc, plus la probabilité d'être plein est faible. La proportion de mots pleins parmi les mots de longueur n sur un alphabet à m lettres est donnée par la formule

$$\frac{F_m(n)}{m^n}.$$

Selon le raisonnement précédent, cette proportion tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Les premières valeurs pour les alphabets à 2, 3, 4 et 5 lettres sont illustrées dans la Figure 3.2. Ainsi, les mots pleins se font relativement rares à mesure que la longueur des mots augmente. Concernant la complexité en facteurs des mots pleins, nous posons les questions suivantes.

Question 1. *Quels sont les mots pleins à complexité factorielle maximale ? Est-ce que cette complexité peut être exponentielle ?*

Considérons maintenant les mots pleins infinis. Dans leur article, Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer ont caractérisé les mots pleins périodiques infinis. La période doit être un produit de deux palindromes et un certain préfixe fini doit être plein.

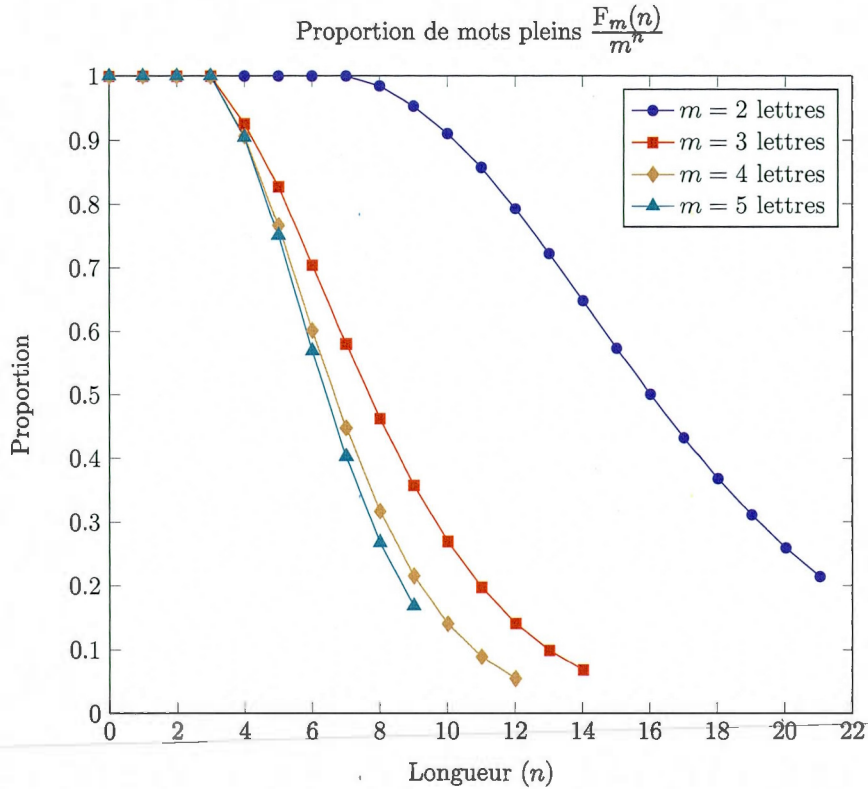


Figure 3.2 Proportion de mots pleins parmi les mots d'une longueur donnée sur un alphabet à 2, 3, 4 ou 5 lettres.

Théorème 3.14. (Brlek et al., 2004) *Un mot périodique infini \mathbf{w} est plein si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $\mathbf{w} = (uv)^\omega$ où u et v sont tous des palindromes,
- (ii) $(uv)^{1+e}$ est plein où $e = \lfloor \frac{||u|-|v||}{3} \rfloor / |uv|$.

Plus récemment, Antonio Restivo et Giovanna Rosone ont considéré les mots pleins et leurs relations avec la transformée de Burrows-Wheeler utile en compression de données. Rappelons que la définition de la transformée de Burrows-Wheeler $BWT(w)$ d'un mot w a été donnée à la Section 1.2. Le cas limite où cette compression est optimale mène à l'étude des mots w sur un alphabet ordonné $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ tels que $BWT(w) = a_k^{n_k} \dots a_2^{n_2} a_1^{n_1}$ où n_1, n_2, \dots, n_k sont des entiers positifs. La

caractérisation de ces mots w dans le cas où $|\Sigma| = 2$ avait été donnée dans (Mantaci, Restivo et Sciortino, 2003) où il avait été démontré qu'ils correspondent aux puissances de conjugués de mots standards et donc liés aux mots sturmiens qui sont pleins. Leur résultat sur un alphabet quelconque donne une condition suffisante pour qu'un mot infini périodique soit plein.

Théorème 3.15. (Restivo et Rosone, 2009) *Si w est un mot fini sur l'alphabet ordonné $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ tel que $BWT(w) = a_k^{n_k} \dots a_2^{n_2} a_1^{n_1}$, alors w de même que w^ω sont pleins.*

Restivo et Rosone donnent l'exemple du mot $w = cacbcac$ qui satisfait à la condition, c'est-à-dire que $BWT(w) = ccccbbaa$, et vérifiant que w^ω est plein. Toutefois, remarquons que le Théorème 3.15 n'inclut pas totalement le cas d'un alphabet à deux lettres, car il ignore le cas où $BWT(w)$ est une puissance > 1 d'un mot standard. De plus, on peut trouver un exemple qui illustre que l'inverse n'est pas vrai. En effet, le mot $w = ccaaccb$ est tel que w^ω est plein mais $BWT(w) = caccbba$ n'est pas de la forme désirée. En fait, très souvent la transformée de Burrows-Wheeler d'un mot plein ne sera pas de la forme $a_k^{n_k} \dots a_2^{n_2} a_1^{n_1}$ tel qu'illustré par le calcul suivant sur les mots de longueur 6 et 7 sur un alphabet à deux lettres :

```
sage: W = Words('ab')
sage: set(w.BWT() for w in W.iterate_by_length(6) if w.is_full())
set([word: babaaa, word: bbbbaa, word: bbbaba, word: bbbbbb, word: bbbbaa,
word: bbaaaa, word: bbaaba, word: aaaaaa, word: bbbbaa, word: babbba,
word: baabba, word: baaaba, word: baaaaa, word: babbba])
sage: set(w.BWT() for w in W.iterate_by_length(7) if w.is_full())
set([word: bbbbaaa, word: bbbbaaa, word: bbabbaa, word: bbaabaa,
word: babbaba, word: baabaaa, word: baabbaa, word: babaaba, word: baaaaa,
word: bbbbbb, word: bbbabba, word: bbaabba, word: aaaaaa, word: bbbbaa,
word: babbba, word: baabba, word: baaabba, word: bbaaaaa, word: baaaaa,
word: bbbbaa])
```

Finalement, en 2009, Bucci, De Luca, Glen et Zamboni sont allés au-delà des mots infinis périodiques et ont caractérisé les mots pleins infinis dont l'ensemble des facteurs respecte certaines conditions.

Théorème 3.16. (Bucci et al., 2009a) *Un mot infini w dont l'ensemble des facteurs*

est fermé sous l'image miroir est plein si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\text{Pal}_n(\mathbf{w})| + |\text{Pal}_{n+1}(\mathbf{w})| = |L_{n+1}(\mathbf{w})| - |L_n(\mathbf{w})| + 2.$$

3.5 Mots dont le défaut est fini non nul

Il y a aussi des mots qui ne sont pas pleins. En effet, certains mots infinis ont un défaut fini non nul, c'est-à-dire $0 < D(w) < \infty$. Ceux-ci sont appelés *almost rich* dans (Glen et al., 2009). Par exemple, il a été démontré (Brlek et al., 2004) que si $k > 1$ est un entier, alors le défaut du mot infini périodique

$$(ab^k ab^{k-1} aab^{k-1} ab^k a)^\omega$$

est k (voir l'Exemple Sage 3.17). Aussi, le mot infini périodique $(aababbaabbabaa)^\omega$ possède un défaut de 1 (Blondin Massé et al., 2008).

Exemple Sage 3.17.

```
sage: w = words.PalindromicDefectWord(4)
sage: w
word: abbbbabbbaabbbabbbba
sage: w.defect()
0
sage: (w^2).defect()
4
sage: (w^6).defect()
4
```

À ce sujet, la conjecture suivante tient toujours.

Conjecture 3.18. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008; Blondin Massé et al., 2008)

Soit w un point fixe $w = \varphi(w)$ d'une substitution primitive φ . Si le défaut est tel que $0 < D(w) < \infty$, alors w est périodique.

La condition que w soit le point fixe d'une substitution primitive est nécessaire et ne peut pas être remplacée par les mots uniformément récurrents en général. Julien

Cassaigne a fourni un exemple pour l'illustrer. Il s'est basé sur le mot p obtenu par la fermeture palindromique de $aababbaa$, un des quatre mots non pleins les plus petits vus précédemment.

Lemme 3.19. (Cassaigne, 2010) *Soit $p = aababbaabbabaa$, $\mu : a \mapsto pa, b \mapsto pb$ et f le mot de Fibonacci sur l'alphabet $\{a, b\}$. Alors $\mu(f)$ est uniformément récurrent et apériodique, mais son défaut est 2 donc fini et non nul.*

Démonstration. Le mot infini en question est

$$\begin{aligned}\mu(f) &= aababbaabbabaa \cdot a \cdot aababbaabbabaa \cdot b \cdot aababbaabbabaa \cdot a \cdot \dots \\ &= aababba\overset{\downarrow}{a}bbabaa\overset{\downarrow}{a}aababbaabbabaa\overset{\downarrow}{a}baababbaabb\ldots\end{aligned}$$

Les deux premières *lacunes* (Blondin Massé et al., 2008), i.e., positions où aucun nouveau palindrome n'est créé par l'ajout d'une lettre, sont indiquées d'une flèche et les plus longs suffixes palindromes non unioccurrents dans un préfixe sont soulignés. Il s'avère qu'il n'y a pas d'autres lacunes et que le défaut de $\mu(f)$ est bien $D(\mu(f)) = 2$. Il suffit de remarquer qu'après le préfixe $papb$, chaque lettre de $\mu(f)$ ajoutera un nouveau palindrome aux facteurs et cela découle du fait que le mot de Fibonacci est plein et que si $w = w_1w_2 \cdots w_n$ est un palindrome du mot de Fibonacci, alors $\mu(w)p = pw_1pw_2pw_3 \cdots pw_n p$ est un palindrome. \square

3.6 Mots dont le défaut est infini et de complexité palindromique infinie

D'autres mots ont un défaut infini. C'est le cas du mot de Thue-Morse t . Nous illustrons ci-dessous les premiers palindromes qui apparaissent dans la suite de Thue-Morse ainsi que les premières positions où aucun nouveau palindrome n'est créé.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$t =$	a	b	b	a	b	a	a	b	b	a	a	b	a	b	$b \dots$

Palindromes

a
b
$b \quad b$
$a \quad b \quad b \quad a$
$b \quad a \quad b$
$a \quad b \quad a$
$a \quad a$
$b \quad a \quad a \quad b$
$a \quad a \quad b \quad b \quad a \quad a$

On remarque qu'il y a des lacunes aux positions 8 et 9. Il est facile de remarquer que les intervalles suivants

$$[8, 9], [24, 25], [32, 39], [96, 103], [128, 159], [384, 415], \dots$$

sont des lacunes du mot de Thue-Morse. Par contre, il est plus difficile de montrer qu'il n'y en a pas ailleurs. Nous l'avons démontré en 2008.

Théorème 3.20. (Blondin Massé et al., 2008) *L'ensemble des lacunes du mot de Thue-Morse est exactement l'union des intervalles $[L(n), L(n) + \ell(n)]$ où $n > 0$,*

$$L(n) = \begin{cases} 2^{n+2}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n+2} + 2^{n+1}, & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \ell(n) = \begin{cases} 2^n, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n-1}, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Or, les préfixes de longueur 4^n où $n \in \mathbb{N}$ du mot de Thue-Morse sont des palindromes. Donc, le mot de Thue-Morse est un mot contenant une infinité de palindromes (riche en palindromes) et dont le défaut est infini. Il n'est pas le seul point fixe de morphisme sur un alphabet à deux lettres à posséder cette propriété particulière.

Parmi les 12381 morphismes primitifs φ sur l'alphabet $\{a, b\}$ prolongeables en la lettre a tels que $|\varphi(ab)| \leq 11$, des calculs effectués sur des préfixes finis indiquent que seulement 58 morphismes engendreraient un point fixe dont la complexité palindromique et le défaut sont infinis. Les données pour chacune des classes de complexité sont indiquées dans le Tableau 3.3. Ainsi, seulement quelques-uns des morphismes ($< 1\%$) génèrent un

$ \text{Pal}(\mathbf{w}) $	$D(\mathbf{w})$	
∞	0	2649 (21%)
∞	$0 < D(\mathbf{w}) < \infty$	0
∞	∞	58 (0.5%)
fini	∞	9674 (78%)
		Total : 12381

Tableau 3.3 Nombre de morphismes primitifs prolongeables sur la lettre a tels que $|\varphi(ab)| \leq 11$ générant des points fixes se trouvant dans chacune des quatre classes de complexité palindromique. Bien qu'il existe des points fixes de morphisme sur un alphabet à deux lettres dont le défaut est fini non nul, aucun n'est tel que $|\varphi(ab)| \leq 11$, d'où le 0 dans le tableau.

point fixe se comportant comme le mot de Thue-Morse pour la complexité palindromique et le défaut. En restreignant la contrainte à $|\varphi(ab)| \leq 10$, le nombre de morphismes primitifs de ce type passe de 58 à 29. Ils sont affichés ci-dessous.

$a \mapsto ab, b \mapsto ba$	$a \mapsto aababa, b \mapsto abb$	$a \mapsto aabbabba, b \mapsto ab$
	$a \mapsto aabbba, b \mapsto bab$	$a \mapsto abbabbba, b \mapsto ba$
	$a \mapsto ababaa, b \mapsto bba$	$a \mapsto aabbbba, b \mapsto bab$
$a \mapsto abbaab, b \mapsto ba$	$a \mapsto abbabb, b \mapsto bba$	$a \mapsto aababa, b \mapsto abbb$
$a \mapsto aabb, b \mapsto bbaa$	$a \mapsto abbba, b \mapsto baab$	$a \mapsto ababaa, b \mapsto bbba$
$a \mapsto abab, b \mapsto baba$	$a \mapsto abba, b \mapsto baaab$	$a \mapsto abbbba, b \mapsto baab$
$a \mapsto abba, b \mapsto baab$	$a \mapsto aab, b \mapsto baabaa$	$a \mapsto abbba, b \mapsto baaab$

$$\begin{array}{lll}
a \mapsto ab, b \mapsto baabba & a \mapsto aab, b \mapsto bababb & a \mapsto aaab, b \mapsto bababb \\
a \mapsto aba, b \mapsto bbaabb & a \mapsto abba, b \mapsto baaaaab & \\
a \mapsto abb, b \mapsto aababa & a \mapsto abbb, b \mapsto aababa & \\
& a \mapsto aba, b \mapsto bbaaabb & \\
& a \mapsto ab, b \mapsto aabbabba & \\
& a \mapsto ab, b \mapsto baabaabb &
\end{array}$$

Cela mène à la question ouverte suivante.

Question 2. *Peut-on donner une caractérisation de ces morphismes, c'est-à-dire les morphismes primitifs générant des points fixes dont la complexité palindromique et le défaut sont infinis ?*

3.7 Mots dont le défaut est infini et de complexité palindromique finie

Un mot infini ayant un défaut infini peut aussi avoir un nombre fini de palindromes. C'est le cas du point fixe

abbbababaabbbbaabbbbaabbbbababababababab...

commençant par la lettre a du morphisme $a \mapsto abb, b \mapsto ba$ de $\{a, b\}^*$. Nous calculons les palindromes à l'Exemple Sage 3.21 et nous démontrons qu'il n'y en a pas d'autres au Lemme 3.22.

Exemple Sage 3.21.

Calculons les palindromes apparaissant dans un préfixe fini du point fixe commençant par la lettre a du morphisme $a \mapsto abb, b \mapsto ba$.

```
sage: m = WordMorphism('a->abb,b->ba')
```

```

sage: w = m.fixed_point('a'); w
word: abbbababaabbaabbbabababababababababab...
sage: prefixe = w[:1000]
sage: pals = prefixe.palindromes()
sage: pals
set([word: , word: bab, word: babab, word: baabbbbaab, word: bbabb,
word: abbba, word: aabbbbaa, word: bb, word: b, word: bbaabbbbaabb,
word: bbaabb, word: babbbab, word: abbbbaabbbba, word: aa, word: aba,
word: ababa, word: bbaabbbb, word: a, word: bbb, word: baab,
word: baabbbbaabbbbaab, word: abba, word: aabbbbaabbbbaa])
sage: len(pals)
23

```

Lemme 3.22. *Le langage L_σ engendré par la substitution $\sigma : a \mapsto abb, b \mapsto ba$ contient 23 palindromes.*

Démonstration. L'expérimentation précédente démontre que 23 palindromes font partie du langage de la substitution $a \mapsto abb, b \mapsto ba$:

$$L_\sigma \supseteq P_{23} = \{\varepsilon, bab, b, babab, aba, baabbbbaab, bbabb, ababa, abbba, bbaabbbb, aabbbbaa, bb, a, bbaabbbbaabb, abba, aa, baabbbbaabbbbaab, baab, bbb, abbbbaabbbba, bbaabb, babbbab, aabbbbaabbbbaa\}.$$

Ces facteurs apparaissent tous dans le préfixe de longueur 40 du point fixe de la substitution. Démontrons qu'il n'y en a pas d'autres. Pour ce faire, il suffit de démontrer que

$$\alpha p \alpha \notin P_{23} \implies \alpha p \alpha \notin L_\sigma$$

pour tout $p \in P_{23}$. Les palindromes sont représentés sous forme d'un graphe orienté dans la Figure 3.3 où les sommets p et $\alpha p \alpha$, où $\alpha \in \{a, b\}$, sont reliés par une flèche. Comme les mots du langage L_σ sont des facteurs des mots de $\{abb, ba\}^*$, on remarque que aa et bbb sont les plus grandes puissances d'une lettre qui peuvent apparaître dans le langage L_σ . De façon plus générale, les facteurs

$$aaa, bbbb, aaba, abbaa, ababb, bbbabb$$

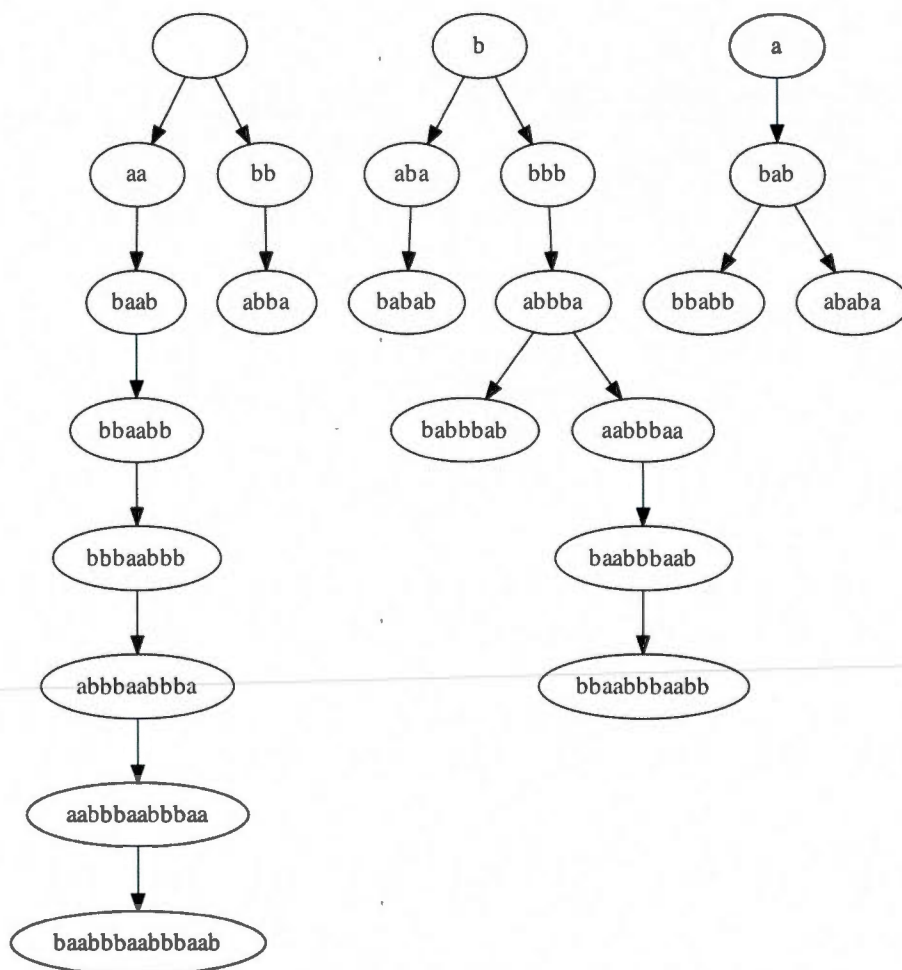


Figure 3.3 Graphe des 23 palindromes apparaissant dans le langage L_σ de la substitution $\sigma : a \mapsto abb, b \mapsto ba$. Une flèche relie les palindromes p aux palindromes $\alpha p \alpha$.

n'appartiennent pas au langage L_σ , car ils ne peuvent pas s'écrire comme un facteur d'un produit de blocs abb et ba . Plus loin dans la preuve, on dira que ce sont des facteurs *interdits*. Procédons en ordre croissant de longueur des palindrome P_{23} , en montrant que si $\alpha p \alpha \notin P_{23}$ alors $\alpha p \alpha \notin L_\sigma$. Les raisonnements sont dans le Tableau 3.5. Cela achève de démontrer que le langage L_σ engendré par la substitution $\sigma : a \mapsto abb, b \mapsto ba$

$p \in P_{23}$	$\alpha p \alpha \notin P_{23}$	Justification du fait que $\alpha p \alpha \notin L_\sigma$
a	aaa	Le facteur aaa est interdit.
aa	$aaaa$	Le facteur aaa est interdit.
bb	$bbbb$	Le facteur $bbbb$ est interdit.
aba	$aabaa$	Le facteur $aabaa$ contient le facteur interdit $aaba$.
bbb	$bbbb$	Le facteur $bbbb$ est interdit.
$baab$	$abaaba$	Le facteur $aaba$ est interdit.
$abba$	$aabbaa$	Le facteur $abbaa$ est interdit.
	$babbab$	$b abb ab$ provient du facteur interdit aaa .
$babab$	$abababa$	$a ba ba ba$ provient du facteur interdit $bbbb$.
	$bbababb$	Le facteur $ababb$ est interdit.
$bbabb$	$abbabba$	$abb abb a$ provient du facteur interdit aaa .
	$bbbabbb$	Le facteur $bbbabb$ est interdit.
$ababa$	$aababaa$	Le facteur $aaba$ est interdit.
	$bababab$	$ ba ba ba b$ provient du facteur interdit $bbbb$.
$bbaabb$	$abbaabba$	Le facteur $abbaa$ est interdit.
$babbbab$	$ababbbaba$	Le facteur $ababb$ est interdit.
	$bbabbbabb$	Le facteur $bbbabb$ est interdit.
$aabbbbaa$	$aaabbbbaa$	Le facteur aaa est interdit.
$bbbaabbb$	$bbbbaabbbb$	Le facteur $bbbb$ est interdit.
$baabbbbaab$	$abaabbbbaaba$	Le facteur $aaba$ est interdit.
$abbbbaabba$	$babbbbaabbbab$	$b abb ba abb ba b$ provient de $aababb$ qui contient le facteur interdit $aaba$.
$bbaabbbbaabb$	$abbaabbbbaabba$	Le facteur $abbaa$ est interdit.
	$bbbbaabbbbaabbb$	$bb ba abb ba abb b$ provient de $a ba ba b$ qui provient du facteur interdit $bbbb$.
$aabbbbaabbbbaa$	$aaabbbbaabbbbaa$	Le facteur aaa est interdit.
$baabbbbaabbbbaab$	$abaabbbbaabbbbaaba$	Le facteur $aaba$ est interdit.
	$bbaabbbbaabbbbaabb$	$b ba abb ba abb ba abb $ provient de $a ba ba ba $ qui provient du facteur interdit $bbbb$.

Tableau 3.5 Justifications que $\alpha p \alpha \notin L_\sigma$ pour tous les palindromes $p \in P_{23}$ tels que $\alpha p \alpha \notin P_{23}$ où la substitution considérée est $\sigma : a \mapsto abb, b \mapsto ba$.

contient exactement 23 palindromes. \square

En 2004, Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer ont considéré les mots contenant un nombre fini de palindromes P . Leur but était de construire des mots dont les facteurs palindromes sont contenus dans l'ensemble P . En supposant que P est factoriellement fermé pour les palindromes, ils ont défini l'ensemble Q comme l'ensemble des éléments minimaux de $\text{Pal}(\Sigma^*) \setminus P$ où la minimalité est considérée selon l'ordre partiel des facteurs $u \leq v \iff u$ est un facteur de v . Cela leur a permis de montrer que le langage factoriel maximal contenant un nombre fini de palindromes P est rationnel.

Théorème 3.23. (Brlek et al., 2004) *Le langage factoriel maximal dont les palindromes sont contenus dans P est rationnel et est donné par $L_P = \Sigma^* \setminus \Sigma^* Q \Sigma^*$.*

Dans la preuve du Lemme 3.22, l'ensemble Q correspond aux mots $\alpha p \alpha \notin P_{23}$ tels que $p \in P_{23}$. En vertu du Théorème 3.23, le point fixe commençant par la lettre a du morphisme $a \mapsto abb, b \mapsto ba$ peut être reconnu par un automate. Un mot infini peut posséder encore moins de 23 palindromes comme le démontre le résultat suivant.

Lemme 3.24. *Le langage engendré par la substitution $\sigma : a \mapsto aababb, b \mapsto a$ contient exactement 13 palindromes.*

Démonstration. L'unique point fixe x de la substitution $\sigma : a \mapsto aababb, b \mapsto a$ est

$$x = aababbaababbaaababbaaababbaaababbaaababb\dots$$

et ce préfixe de longueur 40 affiché contient les 13 palindromes suivants :

$$P_{13} = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, b, bb, aba, abba, bab, baab, baaab, baaaab\}.$$

Pour démontrer que le langage L_σ de x ne contient pas d'autres palindromes, il faut montrer que si $\alpha p \alpha \notin P_{13}$, alors $\alpha p \alpha \notin L_\sigma$. Cela se démontre avec des arguments similaires à la preuve du Lemme 3.22. \square

Est-ce possible pour un point fixe infini ou pour un mot infini quelconque de posséder moins de 13 facteurs palindromiques ? Comme me l'a demandé Julien Cassaigne suite à une présentation que j'ai effectuée au séminaire Ernest à Marseille le 20 avril 2010 :

Question 3 (Julien Cassaigne, 20 avril 2010). *Quel est le nombre minimal de palindromes que peut contenir un point fixe infini ? Un mot infini ?*

Afin de répondre à cette question, nous définissons la fonction suivante qui calcule le nombre minimal de palindromes qu'un mot de longueur n sur un alphabet Σ de m lettres peut contenir :

$$\text{MP}_m(n) = \min \{ |\text{Pal}(w)| : w \in \Sigma^n \}.$$

Dans la suite, on dira qu'un mot $w \in \Sigma^n$ est de *complexité palindromique minimale* si $|\text{Pal}(w)| = \text{MP}_m(n)$ et on calculera leur nombre à l'aide de la fonction $V_m(n)$:

$$V_m(n) = |\{w \in \Sigma^n : w \text{ est de complexité palindromique minimale}\}|.$$

Les premières valeurs de $\text{MP}_m(n)$ et $V_m(n)$ sont dans le Tableau 3.6. Évidemment, un mot qui contient trois lettres distinctes possède au moins 4 palindromes (les trois lettres plus le mot vide). Or, il est possible de construire des mots qui n'en possèdent pas plus. Ce sont exactement (Brlek et al., 2004) les préfixes de $(abc)^\omega$, $(acb)^\omega$, $(bac)^\omega$, $(bca)^\omega$, $(cab)^\omega$ ou $(cba)^\omega$ ou de façon équivalente les facteurs de longueur au moins 3 de $(abc)^\omega$ et $(cba)^\omega$. Ainsi, si $n \geq 4$, alors $V_3(n) = 6$. Sur un alphabet de plus de trois lettres, un mot contenant plus de trois lettres possèdera plus de 4 palindromes de sorte que les mots de complexité palindromique minimale sont ceux qui ne contiennent que trois lettres et de façon plus précise sont les 6 mots énumérés ci-dessus à permutation des lettres près. Par exemple, si $n \geq 4$, alors $V_4(n) = 24$. Dans ce qui suit, nous nous intéressons plus particulièrement aux mots de complexité palindromique minimale où l'alphabet est restreint à deux lettres, i.e. lorsque $m = 2$. Remarquons qu'il était connu qu'un mot sur deux lettres peut posséder moins de 13 palindromes et qu'un exemple a

n	$MP_2(n)$	$MP_3(n)$	$MP_4(n)$	$V_2(n)$	$V_3(n)$	$V_4(n)$
0	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	3	4
2	3	3	3	4	9	16
3	4	4	4	8	27	64
4	5	4	4	16	6	24
5	6	4	4	32	6	24
6	7	4	4	64	6	24
7	8	4	4	128	6	24
8	8	4	4	4	6	24
9	9	4	4	24	6	24
10	9	4	4	16	6	24
11	9	4	4	12	6	24
12	9	4	4	12	6	24
13	9	4	4	12	6	24
14	9	4	4	12	6	24
15	9	4	4	12	6	24
16	9	4	4	12	6	24
17	9	4	4	12	6	24

Tableau 3.6 Nombre de mots sur l'alphabet à deux, trois ou quatre lettres possédant un nombre minimal de palindromes.

été donné dans (Brlek et al., 2004, p. 297) où on décrit un mot infini non périodique possédant 11 palindromes.

D'abord, tous les mots w sur un alphabet de 2 lettres de longueur au plus 7 sont pleins, de sorte que le nombre minimal de palindromes qu'ils contiennent est $|w| + 1$. On peut donc dire qu'ils sont de complexité palindromique à la fois minimale et maximale.

Parmi ceux de longueur 8, 252 des 256 sont pleins et contiennent 9 palindromes. On a déjà vu que quatre autres contiennent 8 palindromes. Ils sont de complexité palindromique minimale :

$$aababbaa, aabbabaa, bbaababb, bbabaabb.$$

Dans le résultat suivant, on démontre que si w est un mot sur un alphabet à deux lettres tel que $|w| \geq 9$, alors w contient au moins 9 palindromes et cette limite inférieure est

toujours atteinte.

Lemme 3.25. *Si $n \geq 9$, alors, $MP_2(n) \geq 9$.*

Démonstration. D'abord, tous les mots de longueur au moins 9 contiennent un facteur de longueur 9. La suite de la démonstration est assistée par ordinateur. Il suffit de remarquer que tous les mots de longueur 9 contiennent au moins 9 palindromes :

```
sage: W = Words('ab')
sage: min(len(w.palindromes())) for w in W.iterate_by_length(9)
9
```

□

Comme l'avait remarqué (Brlek et al., 2004), le mot *aababb* et ses conjugués sont les plus petits mots asymétriques sur un alphabet de deux lettres. Dans le lemme qui suit, nous calculons les palindromes que contient le mot infini périodique $(aababb)^\omega$.

Lemme 3.26. *Le mot infini périodique $(aababb)^\omega$ contient les 9 palindromes*

$$\{\varepsilon, a, b, aa, bb, bab, aba, baab, abba\}$$

et aucun autre.

Démonstration. D'abord, remarquons que les facteurs de longueur au plus 4 du mot infini périodique $\mathbf{w} = (aababb)^\omega$ sont :

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{w}) &= \{\varepsilon\}, \\ L_1(\mathbf{w}) &= \{b, a\}, \\ L_2(\mathbf{w}) &= \{ab, bb, ba, aa\}, \\ L_3(\mathbf{w}) &= \{aab, aba, bab, bba, abb, baa\}, \\ L_4(\mathbf{w}) &= \{abab, bbaa, abba, aaba, baab, babb\}. \end{aligned}$$

Ainsi, le mot \mathbf{w} contient au moins les 9 palindromes suivants :

$$\{\varepsilon, a, b, aa, bb, bab, aba, baab, abba\}.$$

Les palindromes sont représentés sous forme d'un graphe orienté dans la Figure 3.4, où les sommets p et $\alpha p \alpha$ où $\alpha \in \{a, b\}$ sont reliés par une flèche. Démontrons qu'il n'y en a

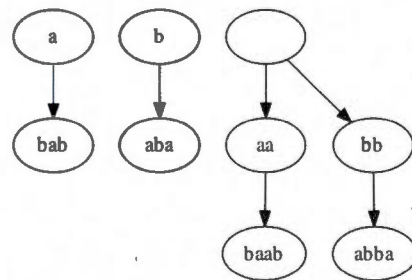


Figure 3.4 Graphe des 9 palindromes apparaissant dans le mot infini périodique $(aababb)^\omega$. Une flèche relie les palindromes p aux palindromes $\alpha p \alpha$.

pas d'autres. Pour ce faire, il suffit de remarquer qu'il n'y a pas de palindromes parmi les facteurs de longueur 5 et 6 :

$$L_5(\mathbf{w}) = \{babba, baaba, bbaab, ababb, aabab, abbaa\},$$

$$L_6(\mathbf{w}) = \{abbaab, bbaaba, ababba, baabab, aababb, babbaa\}.$$

Supposons que \mathbf{w} possède un palindrome p de longueur supérieure ou égale à 7. Si la longueur $|p|$ est impaire, alors le facteur central de p de longueur 5 est un palindrome aussi facteur de \mathbf{w} ce qui est une contradiction. Si la longueur $|p|$ est paire, alors le facteur central de p de longueur 6 est un palindrome aussi facteur de \mathbf{w} ce qui est une contradiction. Donc, \mathbf{w} ne possède aucun palindrome autre que les 9 énumérés plus haut. \square

Les Lemmes 3.25 et 3.26 entraînent immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.27. *Si $n \geq 9$, alors, $MP_2(n) = 9$.*

Tel qu'indiqué dans le Tableau 3.6, il y a 24 mots de longueur 9 de complexité palindromique minimale et 16 de longueur 10. Pour les mots de longueur 11 et plus, il semble n'y avoir que 12 mots de complexité palindromique minimale. On peut les calculer à l'aide de Sage :

```
sage: W = Words('ab')
sage: [w for w in W.iterate_by_length(8) if len(w.palindromes()) == 8]
[word: aababbaa, word: aabbabaa, word: bbaababb, word: bbabaabb]
sage: [w for w in W.iterate_by_length(9) if len(w.palindromes()) == 9]
[word: aaababbaa, word: aaabbabaa, word: aababbaaa, word: aababbaab,
word: aababbbbaa, word: aabbabaaa, word: aabbabaab, word: aabbbabaa,
word: abaabbaba, word: ababbaaba, word: abbaababb, word: abbabaabb,
word: baababbaa, word: baabbabaa, word: babaabbab, word: babbaabab,
word: bbaaababb, word: bbaababba, word: bbaababbb, word: bbabaaabb,
word: bbabaabba, word: bbabaabbb, word: bbbaababb, word: bbbabaabb]
sage: [w for w in W.iterate_by_length(10) if len(w.palindromes()) == 9]
[word: aaababbaaa, word: aaabbabaaa, word: aababbaaba, word: aabbabaabb,
word: abaabbabaa, word: ababbaabab, word: abbaababba, word: abbabaabba,
word: baababbaab, word: baabbabaab, word: babaabbaba, word: babbaababb,
word: bbaababbaa, word: bbabaabbab, word: bbbaababbb, word: bbbabaabbb]
sage: [w for w in W.iterate_by_length(11) if len(w.palindromes()) == 9]
[word: aababbaabab, word: aabbabaabba, word: abaabbabaab,
word: ababbaababb, word: abbaababbaa, word: abbabaabbab,
word: baababbaaba, word: baabbabaabb, word: babaabbabaa,
word: babbaababba, word: bbaababbaab, word: bbabaabbaba]
sage: [w for w in W.iterate_by_length(12) if len(w.palindromes()) == 9]
[word: aababbaababb, word: aabbabaabbab, word: abaabbabaabb,
word: ababbaababba, word: abbaababbaab, word: abbabaabbaba,
word: baababbaabab, word: baabbabaabba, word: babaabbabaab,
word: babbaababbaa, word: bbaababbaaba, word: bbabaabbabaa]
```

On remarque aussi que les douze mots de longueur 11 de complexité palindromique minimale sont des puissances rationnelles de conjugués de *aababb* et de son image miroir. La Proposition suivante le démontre de façon générale.

Proposition 3.28. *Soit w un mot sur un alphabet de deux lettres tel que $|w| \geq 11$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $|\text{Pal}(w)| = 9$,
- (ii) w est de complexité palindromique minimale,
- (iii) w est un facteur de $(aababb)^\omega$ ou $(bbabaa)^\omega$.

Démonstration. (i) \iff (ii). L'équivalence entre les énoncés (i) et (ii) est une conséquence du Corollaire 3.27.

(iii) \implies (i). Comme $|w| \geq 11$, alors w contient au moins 9 palindromes selon le Lemme 3.25. Si w est un facteur de $(aababb)^\omega$, alors son langage est un sous-ensemble du langage de $(aababb)^\omega$. En vertu du Lemme 3.26, on a que $|\text{Pal}(w)| = 9$.

Si w est un facteur de $(bbabaa)^\omega$, alors son langage est un sous-ensemble des images miroirs des mots du langage de $(aababb)^\omega$. Mais comme les palindromes sont fixés par l'image miroir, on a aussi que $|\text{Pal}(w)| = 9$.

(i) \implies (iii). Considérons l'ensemble des facteurs de w de longueur 11. Ceux-ci contiennent exactement 9 palindromes, car ils doivent en contenir au moins 9 et que si l'un d'entre eux en contenait plus, alors w en contiendrait plus que 9 ce qui contredit l'hypothèse. Donc, ces facteurs sont de complexité palindromique minimale. Or, le graphe de Rauzy des douze facteurs de longueur 11 de complexité palindromique minimale, illustré dans la Figure 3.5, est formé de deux cycles. Il y a donc deux possibilités pour le mot w : soit w est un facteur de $(aababb)^\omega$, soit il est facteur de $(bbabaa)^\omega$.

□

Ainsi, il y a douze mots périodiques infinis sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant un nombre minimal de palindromes et ils contiennent les 9 palindromes suivants :

$$\varepsilon, a, b, aa, bb, bab, aba, baab, abba.$$

3.8 Complexité palindromique des mots périodiques

Dans le cas des mots périodiques, il est aisé de déterminer à la fois sa complexité palindromique et son défaut. Rappelons qu'un mot w est dit *symétrique* s'il est le produit de deux palindromes, et *asymétrique* sinon. De plus, le conjugué d'un mot symétrique est symétrique. Or, on sait que

Théorème 3.29. (Brlek et al., 2004, Théorème 4) *Soit $\mathbf{w} = w^\omega \in \Sigma^\omega$. Alors on a*

$$(i) \quad |\text{Pal}(\mathbf{w})| = \infty \iff w \text{ est symétrique};$$

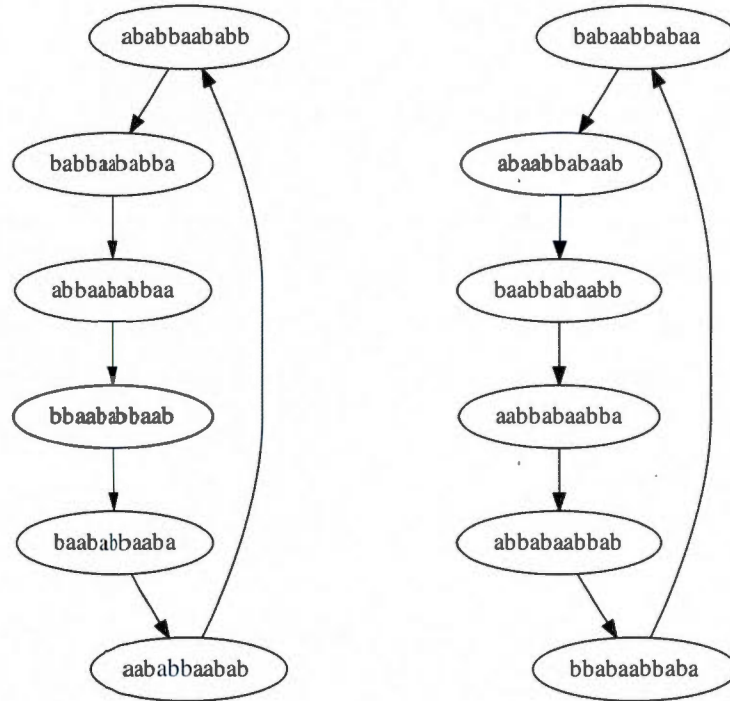


Figure 3.5 Graphe de Rauzy du langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ de longueur 11 de complexité palindromique minimale.

(ii) $|\text{Pal}(w)| < \infty \iff w$ est asymétrique.

De plus, le défaut d'un mot périodique dont la période est un mot symétrique peut être calculé à partir d'un certain préfixe. La longueur exacte du préfixe est donnée dans (Brlek et al., 2004), mais elle est toujours plus petite que deux fois la période.

Proposition 3.30. (Brlek et al., 2004, Théorème 6) *Soit w un mot symétrique. Alors $D(w^\omega) = D(ww)$.*

Il est donc intéressant de pouvoir calculer l'ensemble des palindromes dans le cas où la période est conjuguée d'un mot asymétrique, pourvu qu'on sache quand arrêter.

Proposition 3.31. *Soit w un mot asymétrique. Alors $\text{Pal}(w^\omega) = \text{Pal}(ww)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les longueurs des facteurs palindromes de w^ω sont strictement inférieures à $|w|$. Supposons par contradiction qu'il existe un palindrome p facteur de w^ω tel que $|p| \geq |w|$. Alors, il existe un conjugué z de w tel que p est préfixe de z^ω . Si $|p| = |w|$, alors le palindrome $p = z$ est conjugué à w ce qui contredit l'hypothèse que w est symétrique. Si $|p| > |w|$, alors il existe un entier $k \geq 2$ tel que p est préfixe de z^k mais pas de z^{k-1} . Soit q tel que $pq = z^k$ et soit r le préfixe de z tel que $z = rq$ et $p = z^{k-1}r$. On a $p = rqz^{k-2}r$. Donc r est un palindrome, car il est à la fois préfixe et suffixe du palindrome p . De même, q est un palindrome, car il est à la fois préfixe et suffixe du palindrome qz^{k-2} . On conclut que $z = rq$ est symétrique et par conjugaison w est symétrique ce qui est une contradiction. \square

Si w est symétrique, alors il existe un conjugué z de w tel que $D(w^\omega) = D(z)$ (Brlek et al., 2004, Corollaire 8). Toutefois, cela n'est pas vrai pour les palindromes. En effet, aucun des conjugués de $aababb$ ne contient tous les palindromes de $(aababb)^\omega$.

On en déduit aisément un algorithme permettant de déterminer si un mot infini périodique possède une complexité palindromique finie et de la calculer, ou également de calculer son défaut lorsque celle-ci est infinie.

3.9 Conclusion

Cela complète notre tour d'horizon des quatre classes de complexité palindromique selon le nombre de palindromes et le défaut. L'étude des palindromes a suscité un intérêt marqué au cours des dernières années et spécialement pendant cette thèse de doctorat (Bucci et al., 2009b; Bucci et al., 2009a; Starosta, 2011b; Pelantová et Starosta, 2011; Starosta, 2011a; Balková, Pelantová et Starosta, 2011; Brlek et Reutenauer, 2011; Balková, Pelantová et Starosta, 2011; Anisiu, Anisiu et Kasa, 2006). De nouvelles caractérisations pour les mots pleins ont été trouvées, les notions ont été étendues aux f -palindromes et surtout plusieurs questions restent ouvertes dont la conjecture suivante démontrée pour

les mots uniformément récurrents par (Balková, Pelantová et Starosta, 2011).

Conjecture 3.32. (Brlek et Reutenauer, 2011) *Soit \mathbf{w} un mot infini dont l'ensemble des facteurs est fermé sous l'image miroir. Alors, le défaut $D(w)$ vérifie l'équation :*

$$2D(w) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{\mathbf{w}}(n)$$

où $T_{\mathbf{w}}(n) = |L_{n+1}(\mathbf{w})| - |L_n(\mathbf{w})| + 2 - |\text{Pal}_n(\mathbf{w})| - |\text{Pal}_{n+1}(\mathbf{w})|$.

CHAPITRE IV

SEGMENTS DISCRETS ET DROITES DISCRÈTES 3D

Plusieurs définitions ont été introduites pour décrire les segments discrets et les droites discrètes en dimensions 2 tant combinatoires qu'arithmétiques. Il s'avère qu'elles sont équivalentes en dimensions 2 mais pas au-delà. Plusieurs définitions ont été proposées pour la droite discrète 3D. Parmi les plus connues, il y a la définition de Jean-Pierre Reveillès (Reveillès, 1991; Debled-Rennesson, 1995; Figueiredo et Reveillès, 1996; Feschet et Reveillès, 2006), le modèle standard de dimension n d'Éric Andres (Andres, 2003), et enfin, une approche qui imite les axiomes d'Euclide (Christ, Pálvölgyi et Stojaković, 2010) (mais qui n'est pas invariante par translation). Jean-Luc Toutant (Toutant, 2006) a, quant à lui, proposé une définition de droite discrète 26-connexe correspondant aux points les plus proches de la droite euclidienne. Brimkov, Barneva, Brimkov et de Vieilleville (Brimkov et al., 2008) ont aussi considéré une définition incluant tous les points entiers à l'intérieur d'un cylindre. Toutes ces définitions sont basées entre autres sur des conditions arithmétiques, c'est-à-dire des inégalités sur des combinaisons linéaires bien choisies.

Dans ce chapitre, nous proposons de comparer ces définitions sous l'angle de la combinatoire des mots. À partir de la suite de points de \mathbb{Z}^3 définissant une droite discrète 3D 6-connexe (ce qui exclut donc la droite de Toutant), nous calculons le mot sur un alphabet à 3 lettres qui décrit la suite des pas. Ce codage permet de calculer des statistiques intéressantes telles que la complexité en facteurs et l'équilibre. Nous verrons par exemple que la droite d'Andres possède un nombre quadratique de facteurs de longueur n .

Dans nos travaux récents (Berthé et Labbé, 2011a; Berthé et Labbé, 2011b), nous proposons une approche combinatoire à la génération de segments discrets et droites discrètes 3D. Notre approche est basée sur les algorithmes de fractions continues généralisés et les substitutions. Notre principale contribution est une définition de droite discrète 3D dont la complexité en facteurs est linéaire. Nous proposons des algorithmes hybrides de fractions continues dont les propriétés sont prometteuses dans notre contexte. Ainsi, les travaux en cours s'ouvrent sur de nombreuses questions et applications possibles dans des domaines connexes dont la théorie des systèmes dynamiques.

La première section rappelle les définitions équivalentes de droites 2D ainsi que leurs propriétés. La deuxième section concerne les droites 3D 6-connexes antérieures : droite de Reveillès, droite standard d'Andrès. La section suivante porte sur un exemple particulier de droite discrète 3D générée combinatoirement et bien connue par les dynamiciens (Rauzy, 1982) : la suite de Tribonacci dont la projection engendre la fameuse fractale de Rauzy. ~~Après avoir rappelé les algorithmes de fractions continues générali-~~sées, nous présentons notre méthode de génération des droites 3D. Ensuite, on introduit les algorithmes hybrides de fractions continues et nous énonçons des hypothèses sur la complexité en facteurs des mots obtenus. Finalement, le chapitre se termine avec les articles de conférence écrits en commun avec Valérie Berthé et publiés sur le sujet : *An Arithmetic and Combinatorial Approach to Three-Dimensional Discrete Lines* (Berthé et Labbé, 2011a) et *Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies* (Berthé et Labbé, 2011b).

4.1 Mots de Christoffel

Il existe plusieurs définitions équivalentes pour les mots de Christoffel (Berstel, 1990; Berstel et al., 2008). Nous présentons ici celles qui seront utiles pour la suite. Soit, $x, y \in \mathbb{N}$ où x et y sont premiers deux à deux. Le *chemin de Christoffel* de pente y/x est le chemin allant de $(0, 0)$ vers (x, y) dans le réseau \mathbb{Z}^2 constitué de pas qui vont d'un point $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ à un point de la forme $(x+1, y) \in \mathbb{Z}^2$ ou $(x, y+1) \in \mathbb{Z}^2$ et qui satisfait les deux conditions suivantes :

- (i) le chemin est sous le segment reliant $(0,0)$ à (x,y) ,
- (ii) la région du plan délimitée par le chemin et le segment ne contient aucun autre point de \mathbb{Z}^2 mis à part ceux qui sont sur le chemin.

Le chemin de Christoffel de pente 11/15 est représenté à la Figure 4.1. Un chemin de

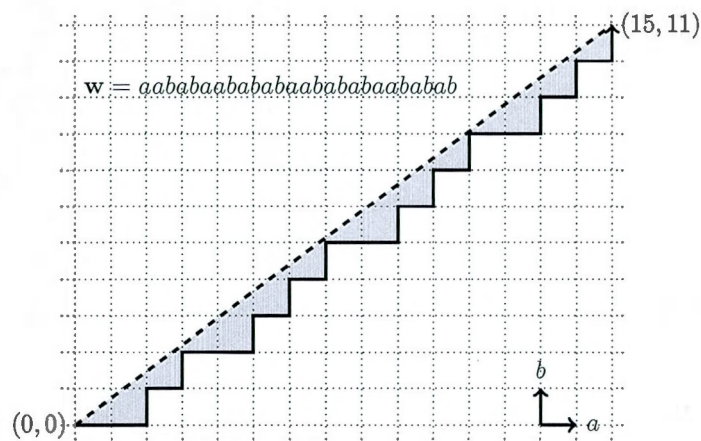


Figure 4.1 Le chemin de Christoffel de pente 11/15 et le mot de Christoffel associé.

Christoffel détermine un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$, appelé *mot de Christoffel* de pente y/x , où un pas horizontal est codé par la lettre a et un pas vertical, par la lettre b . Par exemple, le mot de Christoffel de pente 11/15 est $w = aababababababababababab$.

4.1.1 Algorithme d'Euclide

Une manière de générer le même mot de Christoffel est de procéder avec l'algorithme d'Euclide sur le vecteur initial (x, y) en soustrayant successivement la plus petite valeur de la plus grande autant de fois que possible jusqu'à ce que l'on obtienne le vecteur $(0, g)$ ou $(g, 0)$ où g est le pgcd de x et y :

$$(15, 11) \rightarrow (4, 11) \rightarrow (4, 7) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0).$$

Chaque opération de soustraction peut être représentée par l'une des multiplications matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}.$$

De plus, on peut récupérer le vecteur initial (x, y) , car les deux matrices en question sont inversibles :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}.$$

Le passage d'un vecteur au précédent peut être obtenu par la multiplication d'une puissance d'une matrice élémentaire. En inversant l'algorithme d'Euclide, on peut reconstruire le mot de Christoffel en considérant des mots plutôt que des vecteurs et des morphismes plutôt que des matrices selon la correspondance suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{matrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} a \mapsto ab \\ b \mapsto b \end{matrix}.$$

Pour le mot de Christoffel de pente 11/15, on obtient la suite de mots suivants (voir

$$\begin{array}{ccccccc} (15, 11) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1} & (4, 11) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2} & (4, 3) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1} & (1, 3) & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3} & (1, 0) \\ & \begin{matrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{matrix} & & \begin{matrix} a \mapsto abb \\ b \mapsto b \end{matrix} & & \begin{matrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{matrix} & & \begin{matrix} a \mapsto abbb \\ b \mapsto b \end{matrix} & \\ \mathbf{w}_0 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_1 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_3 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_4 \end{array}$$

Figure 4.2 On obtient le mot de Christoffel \mathbf{w}_0 de pente 11/15 en inversant l'algorithme d'Euclide et associant à chaque matrice une substitution sur l'alphabet $\{a, b\}$. Les substitutions sont appliquées sur le mot initial $\mathbf{w}_4 = a$.

Figure 4.2) :

$$\begin{aligned}
 w_4 &= a, \\
 w_3 &= abbb, \\
 w_2 &= aababab, \\
 w_1 &= abbabbbabbbabbb, \\
 w_0 &= aababaabababaabababaababab.
 \end{aligned}$$

On remarque que les exposants des puissances des matrices (voir Figure 4.2) sont données par les coefficients du développement en fractions continues de la pente :

$$\frac{11}{15} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = [0, 1, 2, 1, 3].$$

4.1.2 Récurrence

Une autre méthode pour générer les mots de Christoffel consiste à procéder récursivement. Le théorème suivant est une légère amélioration du Théorème 7.8 de (Berstel et al., 2008) attribué à (Fraenkel, Mushkin et Tassa, 1978). L'amélioration consiste à décrire explicitement la suite c_n en la reliant au développement en fractions continues de la pente alors que (Berstel et al., 2008) énonce que la suite c_n est une suite fixe d'entiers positifs.

Théorème 4.1. (Fraenkel, Mushkin et Tassa, 1978) *Un mot aub est un mot de Christoffel de pente y/x si et seulement si uba est de la forme s_n avec $s_0 = a$, $s_1 = b$, la récursion $s_{n+2} = s_{n+1}^{c_n} s_n$ et où $c_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, est le développement en fraction continue de $y/x = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_k]$.*

Par exemple, $11/15 = [0, 1, 2, 1, 3] = [c_0, c_1, c_2, c_3, c_4]$ et dans ce cas les termes de la suite

sont définis par les règles

$$\begin{aligned}s_{\alpha,\rho}(n) &= [\alpha(n+1) + \rho] - [\alpha n + \rho], \\ s'_{\alpha,\rho}(n) &= \lceil \alpha(n+1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil,\end{aligned}$$

où $n \geq 0$. Le mot $s_{\alpha,\rho}$ est appelé le *mot mécanique inférieur* et $s'_{\alpha,\rho}$, le *mot mécanique supérieur* de pente α et d'ordonnée à l'origine ρ . Un mot mécanique est *rationnel* ou *irrationnel* selon que la pente α est un nombre rationnel ou irrationnel. Or, il s'avère qu'un mot mécanique irrationnel est un *mot sturmien*, c'est-à-dire un mot infini sur un alphabet binaire possédant exactement $n + 1$ facteurs de longueur n pour tout $n \geq 0$. Plusieurs définitions équivalentes pour les mots sturmiens sont décrites dans (Lothaire, 2002, Chapitre 2). Ce lien entre la description combinatoire et la description arithmétique a été mis en évidence par Morse et Hedlund en 1940.

Théorème 4.3. (Morse et Hedlund, 1940) *Soit s un mot infini. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) s est un mot sturmien,
- (ii) s est équilibré et apériodique,
- (iii) s est un mot mécanique irrationnel.

Lorsque α est irrationnel et $\rho = 0$, les mots mécaniques inférieurs et supérieurs ne diffèrent que par la première lettre :

$$s_{\alpha,0} = 0c_{\alpha}, \quad s'_{\alpha,0} = 1c_{\alpha}$$

où c_{α} est le *mot caractéristique* de pente α . De façon équivalente,

$$c_{\alpha} = s_{\alpha,\alpha} = s'_{\alpha,\alpha}.$$

Théorème 4.4. (Lothaire, 2002, Proposition 2.2.24) *Soit $\alpha = [0, 1 + d_1, d_2, \dots]$ le développement en fractions continues d'un nombre irrationnel α avec $0 < \alpha < 1$ et soit $(s_n)_{n \geq -1}$ une suite de mots définie par $s_{-1} = 1$, $s_0 = 0$ et $s_n = s_{n-1}^{d_n} s_{n-2}$. Alors chaque*

s_n est un préfixe de c_α et

$$c_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

4.2.1 Droite discrète 2D

La définition arithmétique d'une droite discrète 2D a été introduite par Jean-Pierre Reveillès (Reveillès, 1991) et étudiée entre autres par Isabelle Debled-Rennesson (Debled-Rennesson, 1995) :

Une *droite discrète 2D*

- (i) de pente a/b avec $b \neq 0$ et où a et b sont premiers deux à deux,
- (ii) de borne inférieure μ ,
- (iii) d'épaisseur arithmétique ω ,

est l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{Z}^2 satisfaisant la double inéquation diophantienne

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

dont les paramètres sont entiers. Nous désignons la droite discrète précédente par $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$. Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux *droites naïves 2D* qui vérifient $\omega = \sup(|a|, |b|)$. Par suite, une droite naïve de pente a/b et de borne inférieure μ sera notée $\mathcal{D}(a, b, \mu)$.

Lemme 4.5. *Le codage de la droite discrète $\mathcal{D}(a, b, \mu)$ correspond à une puissance du mot de Christoffel de pente a/b ou au mot Sturmien de pente $a/(b - a)$.*

4.3 Droites discrètes 3D 6-connexes antérieures

Plusieurs définitions de droite discrète 3D ont été proposées au cours des dernières années. Notamment, Jean-Luc Toutant (Toutant, 2006) a défini une droite minimale pour la 26-connexité et ayant la propriété d'être la plus proche possible de la droite euclidienne. (Brimkov et al., 2008) ont aussi proposé une définition basée sur la distance à la droite euclidienne en considérant tous les points contenus dans un cylindre. Toutefois,

la droite discrète qu'ils obtiennent n'est pas minimale pour la connexité. Dans cette section, on s'intéresse aux droites 6-connexes. Nous verrons que la droite de Reveillès n'est pas minimale pour la 6-connexité ce qui n'est approprié pour la coder par un mot sur un alphabet à 3 lettres. Quant au modèle standard d'Andres, la droite obtenue est minimale pour la 6-connexité.

4.3.1 Droite de Reveillès

Une caractérisation arithmétique de la droite discrète 3D naïve a été introduite par Isabelle Debled-Rennesson (Debled-Rennesson, 1995) et par O. Figueiredo et Jean-Pierre Reveillès (Figueiredo et Reveillès, 1996). Une généralisation à la dimension n a été proposée plus tard (Feschet et Reveillès, 2006). En dimension trois, elle s'énonce sous la forme suivante.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ un vecteur directeur tel que $a \geq b \geq c$. Les définitions pour des coefficients différemment ordonnés s'obtiennent en permutant x , y et z ainsi que les coefficients. La *droite discrète 3D de Reveillès*, notée \mathcal{D}_{Rev} , de vecteur directeur (a, b, c) est définie par l'ensemble des points (x, y, z) de \mathbb{Z}^3 vérifiant les inégalités diophantiennes suivantes :

$$\mu \leq cx - az < \mu + e$$

$$\mu' \leq bx - ay < \mu' + e'$$

avec $\mu, \mu', e, e' \in \mathbb{Z}$. Les paramètres μ et μ' sont les *bornes inférieures* de \mathcal{D}_{Rev} . De plus, e et e' sont appelées les *épaisseurs arithmétiques* de \mathcal{D}_{Rev} . Une telle droite est notée $\mathcal{D}_{Rev}(a, b, c, \mu, \mu', e, e')$.

Théorème 4.6. (Debled-Rennesson, 1995) *Soit $\mathcal{D}_{Rev}(a, b, c, \mu, \mu', e, e')$ avec $a > b > c$.*

- (i) *Si $e \geq a + c$ et $e' \geq a + b$, \mathcal{D}_{Rev} est 6-connexe.*
- (ii) *Si $e \geq a + c$ et $a \leq e' < a + b$ ou $e' \geq a + b$ et $a \leq e < a + c$, \mathcal{D}_{Rev} est 18-connexe.*
- (iii) *Si $a \leq e < a + c$ et $a \leq e' < a + b$, \mathcal{D}_{Rev} est 26-connexe.*
- (iv) *Si $e < a$ ou $e' < a$, \mathcal{D}_{Rev} est non connexe.*

Dans le Chapitre 5 de la thèse de Debled-Rennesson (Debled-Rennesson, 1995), on considère spécialement les *droites naïves 3D*, c'est-à-dire les droites de Reveillès 26-connexes dont les épaisseurs vérifient $e = e' = a$. On y propose un algorithme de reconnaissance de segments de droites naïves 3D et un algorithme de segmentation de courbes discrètes 26-connexes.

D'après le Théorème 4.6, les plus petites épaisseurs arithmétiques qui déterminent une droite 6-connexe sont $e = a + c$ et $e' = a + b$. Or, il existe des vecteurs directeurs (a, b, c) tels que la droite de Reveillès n'est pas minimale pour cette connexité, car trop de points respectent les inégalités. Considérons l'exemple $(a, b, c) = (10, 5, 3)$. En posant $\mu = e/2$ et $\mu' = e'/2$, le système d'équations devient :

$$\begin{cases} -13/2 \leq 3x - 10z < 13/2 \\ -15/2 \leq 5x - 10y < 15/2 \end{cases}$$

Les premiers points de la droite 6-connexe sont

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 2, 1), (5, 2, 1).$$

Après le point $(5, 2, 1)$, il y a deux possibilités, car les points $(5, 3, 1)$ et $(5, 2, 2)$ sont tous deux dans la droite. En effet, les valeurs de $3x - 10z$ et $5x - 10y$ respectent les inégalités. Elles sont calculées dans le tableau suivant :

(i, j, k)	$(4, 2, 1)$	$(5, 2, 1)$	$(5, 3, 1)$	$(5, 2, 2)$
$3x - 10z$	2	5	5	-5
$5x - 10y$	0	5	-5	5

Cet exemple illustre que la droite de Reveillès n'est pas minimale pour la 6-connexité. Ainsi, le codage par mots n'est pas adapté à cette droite.

4.3.2 Droite d'Andres

Dans (Andres, 2003), Eric Andres a introduit le *modèle standard* pour définir des objets discrets linéaires en dimension n . C'était la première fois qu'une définition parvenait à unifier les objets discrets élémentaires en dimension n . Par exemple, les sommets d'un polygone standard en 3D sont des points 3D du modèle standard, les côtés d'un polygone standard en 3D sont des segments standards 3D et un polygone standard 3D fait partie du plan standard 3D. La définition du modèle standard est obtenue en modifiant certaines des inégalités qui définissent analytiquement un objet du modèle *supercover*. Un objet discret linéaire du modèle *supercover* est défini par un ensemble d'inégalités " $\sum_{i=1}^n a_i X_i \leq a_0$ ". Les points simples qui forment des *bulles* sont les points qui vérifient " $\sum_{i=1}^n a_i X_i = a_0$ ". Afin d'éliminer les points simples, et donc les bulles, certaines des inégalités sont remplacées par des inégalités strictes du type " $\sum_{i=1}^n a_i X_i < a_0$ ". La sélection des inégalités qui sont modifiées est basée sur une convention sur l'orientation. Dans cette section, nous donnons concrètement les définitions des modèles *supercover* et *standard* pour la droite discrète 3D.

La *droite discrète 3D du modèle supercover*, notée $\mathcal{D}_{\text{Supercover}}$, de vecteur directeur $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ est définie par l'ensemble des points (x, y, z) de \mathbb{Z}^3 vérifiant les inégalités diophantiennes suivantes :

$$\begin{aligned} -(a+c)/2 &\leq cx - az \leq (a+c)/2, \\ -(a+b)/2 &\leq bx - ay \leq (a+b)/2, \\ -(b+c)/2 &\leq cy - bz \leq (b+c)/2. \end{aligned}$$

La *droite discrète 3D du modèle standard et d'orientation standard*, notée $\mathcal{D}_{\text{Standard}}$, de vecteur directeur $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ est définie par l'ensemble des points (x, y, z) de \mathbb{Z}^3

vérifiant les inégalités diophantiennes suivantes :

$$-(a+c)/2 \leq cx - az < (a+c)/2,$$

$$-(a+b)/2 \leq bx - ay < (a+b)/2,$$

$$-(b+c)/2 \leq cy - bz < (b+c)/2.$$

On remarque que les deux premières lignes d'inégalités sont identiques à la définition de droite discrète de Reveillès d'épaisseurs $e = a + c$ et $e' = a + b$. La différence avec la droite de Reveillès est donc l'ajout d'une cinquième et sixième inégalité. Ce faisant la définition est valide pour tout vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, alors que la droite de Reveillès n'est définie que pour $a \geq b \geq c$. De plus, il suit de la définition que les trois projections d'une droite standard dans les trois plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ correspondent toutes à une droite discrète 2D 4-connexes. Le modèle standard a aussi l'avantage de définir une droite minimale pour la 6-connexité.

Proposition 4.7. (Andres, 2003)(Brimkov, Andres et Barneva, 2000, Proposition 3)

La droite discrète 3D du modèle standard et d'orientation standard de vecteur directeur $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ est 6-connexes et minimale pour la 6-connexité.

Observons maintenant la droite discrète 3D du modèle standard pour le vecteur $(10, 5, 3)$.

$$-13/2 \leq 3x - 10z < 13/2,$$

$$-15/2 \leq 5x - 10y < 15/2,$$

$$-4 \leq 3y - 5z < 4.$$

Les premiers points de la droite sont

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 2, 1), (5, 2, 1), (5, 2, 2), \dots$$

En comparant à la droite de Reveillès, on remarque que le point $(5, 3, 1)$ n'appartient pas à la droite discrète du modèle standard, car $3y - 5z = 9 - 5 = 4$ ne respecte pas la troisième inégalité. Le tableau suivant montre que les points $(4, 2, 1)$, $(5, 2, 1)$ et $(5, 2, 2)$

respectent les inégalités.

(i, j, k)	$(4, 2, 1)$	$(5, 2, 1)$	$(5, 3, 1)$	$(5, 2, 2)$
$3x - 10z$	2	5	5	-5
$5x - 10y$	0	5	-5	5
$3y - 5z$	1	1	4	-4

La minimalité pour la 6-connexité permet d'associer un mot sur un alphabet de trois lettres à toute droite standard. Dans la prochaine section, on s'intéresse aux propriétés combinatoires du mot ainsi généré.

4.4 Combinatoire de la droite d'Andres

À la suite de points 6-connexe définie par une droite d'Andres, on associe un mot sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ en codant les pas $(1, 0, 0)$ par la lettre 1, les pas $(0, 1, 0)$ par la lettre 2 et les pas $(0, 0, 1)$ par la lettre 3. Pour la droite discrète du modèle standard de vecteur directeur $(10, 5, 3)$, les premiers pas sont :

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1), \dots$$

Le mot associé de longueur $10 + 5 + 3 = 18$ joignant le point de départ $(0, 0, 0)$ au point d'arrivée $(10, 5, 3)$ est

$$w = 121312113211213121.$$

La demi-droite discrète de vecteur directeur $(10, 5, 3)$ peut donc être représentée par le mot infini périodique $\mathbf{w} = w^\omega$. Quelles sont les propriétés combinatoire du mot \mathbf{w} ? En particulier, quelle est sa complexité en facteurs? Comme c'est un mot périodique, la complexité en facteurs est bornée par la longueur de la période comme c'est indiqué dans le Tableau 4.1.

Or, en appliquant une faible variation ϵ au vecteur $(10, 5, 3)$ de sorte que $(10, 5, 3) + \epsilon$ soit irrationnel, le mot infini codé par la droite du modèle standard d'Andres devient

n	$ L_n(\mathbf{w}) $	n	$ L_n(\mathbf{w}) $
0	1	10	17
1	3	11	18
2	6	12	18
3	9	13	18
4	11	14	18
5	12	15	18
6	13	16	18
7	14	17	18
8	15	18	18
9	16	19	18

Tableau 4.1 Complexité en facteurs du mot $(abacabaacbaabacaba)^\omega$.

apériodique. Donc, sa complexité en facteurs est au moins linéaire.

Quoi qu'il en soit, la complexité en facteurs n'est pas linéaire. En effet, la droite discrète du modèle standard correspond à un mot de billard suivant une direction donnée $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. À une trajectoire de billard dans un cube, on associe une suite à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ obtenue en codant par un 1 (resp. 2, 3) chaque rebond sur une paroi frontale (resp. latérale, horizontale). On peut aussi obtenir le mot de billard en considérant l'ensemble des points (x, y, z) tels que la droite de vecteur directeur $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ passant par $(0, 0, 0)$ traverse le cube unité centré en (x, y, z) . Le mot de billard est obtenu en codant cette suite de points 6-connexe par un mot sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ en codant les pas $(1, 0, 0)$ par la lettre 1, les pas $(0, 1, 0)$ par la lettre 2 et les pas $(0, 0, 1)$ par la lettre 3.

Proposition 4.8. *Soit \mathbf{w} le mot infini associé à la droite discrète 3D du modèle standard et d'orientation standard de vecteur directeur $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit \mathbf{b} le mot de billard suivant la direction $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On a que $\mathbf{w} = \mathbf{b}$.*

Démonstration. Un point $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ appartient à la droite discrète 3D du modèle

standard et d'orientation standard de vecteur directeur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\begin{aligned} -(a+c)/2 &\leq cx - az < (a+c)/2, \\ -(a+b)/2 &\leq bx - ay < (a+b)/2, \\ -(b+c)/2 &\leq cy - bz < (b+c)/2, \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} cx - az - (a+c)/2 &< 0 \leq cx - az + (a+c)/2, \\ bx - ay - (a+b)/2 &< 0 \leq bx - ay + (a+b)/2, \\ cy - bz - (b+c)/2 &< 0 \leq cy - bz + (b+c)/2, \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} c(x - \frac{1}{2}) - a(z + \frac{1}{2}) &< 0 \leq c(x + \frac{1}{2}) - a(z - \frac{1}{2}), \\ b(x - \frac{1}{2}) - a(y + \frac{1}{2}) &< 0 \leq b(x + \frac{1}{2}) - a(y - \frac{1}{2}), \\ c(y - \frac{1}{2}) - b(z + \frac{1}{2}) &< 0 \leq c(y + \frac{1}{2}) - b(z - \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} \text{la droite } cx - az = 0 &\text{ traverse le carré unité centré en } (x, z), \\ \text{la droite } bx - ay = 0 &\text{ traverse le carré unité centré en } (x, y), \\ \text{la droite } cy - bz = 0 &\text{ traverse le carré unité centré en } (y, z), \end{aligned}$$

si et seulement si la droite de vecteur directeur (a, b, c) passant par le point $(0, 0, 0)$ traverse le cube unité centré en (x, y, z) ce qui correspond au mot de billard suivant la direction (a, b, c) . \square

La Figure 4.3 illustre ce principe en dimension deux dans le plan des X et Y lorsque $a = -5$ et $b = -2$.

Leur complexité en facteurs est quadratique (Arnoux et al., 1994; Baryshnikov, 1995)).

Plus précisément, on a le résultat suivant.

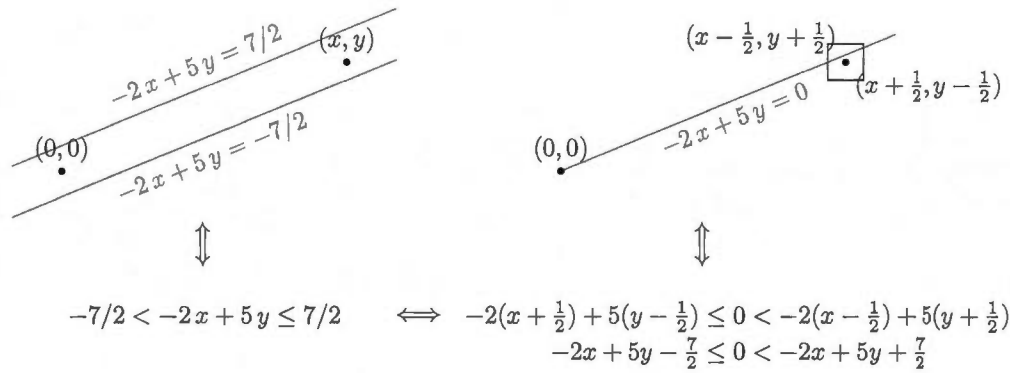


Figure 4.3 Illustration 2D de l'équivalence entre la droite d'Andres et un mot de billard.

Théorème 4.9. (Arnoux et al., 1994; Baryshnikov, 1995) *Si la direction initiale est totalement irrationnelle, le nombre de facteurs distincts apparaissant dans le mot de billard dans un cube est exactement $p(n) = n^2 + n + 1$.*

Vérifions cette complexité sur le vecteur $(23 + \sqrt{2}, 43 + \pi, 14)$ On obtient le mot infini

$$w_1 = 2123212213221232121223122123212213221232 \dots$$

Les premières valeurs de la complexité en facteurs du préfixe de longueur 10000 de w_1 sont dans le Tableau 4.2 et dans la Figure 4.4. La différence entre la courbe $n^2 + n + 1$ est expliquée par le fait qu'un préfixe de longueur 10000 n'est pas assez long pour contenir tous les facteurs de longueur 14 et plus. La complexité des facteurs finis a été considérée par S. Ferenczi et Z. Kása (Ferenczi et Kása, 1999). Dans les prochaines sections, nous présentons des méthodes inspirées du mot de Tribonacci afin de construire des mots codant des droites discrètes 3D dont la complexité en facteurs est linéaire.

4.5 Le mot de Tribonacci

Le mot de Tribonacci a été considéré dans (Rauzy, 1982) où la fractale de Rauzy a aussi été introduite et étudiée plus tard (Arnoux et Ito, 2001). Il s'agit d'un mot infini sur un alphabet à trois lettres dont la complexité en facteurs est $2n + 1$. Ce mot représente

n	$ L_n(p) $	$n^2 + n + 1$	n	$ L_n(p) $	$n^2 + n + 1$
0	1	1	10	111	111
1	3	3	11	133	133
2	7	7	12	157	157
3	13	13	13	183	183
4	21	21	14	210	211
5	31	31	15	239	241
6	43	43	16	268	273
7	57	57	17	299	307
8	73	73	18	330	343
9	91	91	19	363	381

Tableau 4.2 Complexité en facteurs du préfixe p de longueur 10000 du mot w_1 . Les valeurs de $|L_n(p)|$ sont inférieures à $n^2 + n + 1$ à partir de $n = 14$ car le préfixe p de longueur 10000 n'est pas assez long pour contenir tous les facteurs.

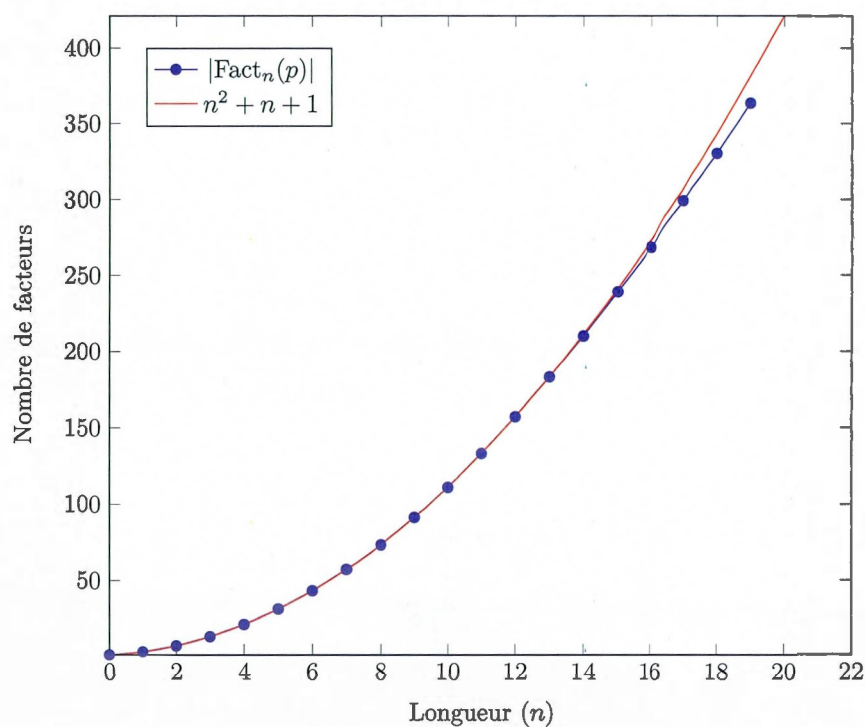


Figure 4.4 Complexité en facteurs du préfixe p de longueur 10000 du mot w_1 .

une approximation discrète d'une direction correspondant à un vecteur propre d'une certaine matrice. Avant de considérer les droites discrètes pour des vecteurs directeurs quelconques, il est pertinent de bien comprendre l'exemple du mot de Tribonacci.

Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$ et soit $\sigma : A^* \rightarrow A^*$ le morphisme donné par la règle $1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$. Le mot de Tribonacci est l'unique point fixe

$$\mathbf{u} = 1213121121312121312112131213121121312121...$$

de σ . Soit $U_n \in A^*$ le préfixe de longueur n de \mathbf{u} :

$$U_n = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{n-1}.$$

La matrice d'incidence de σ est

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$. Ce polynôme possède une racine réelle positive $\beta > 1$ (la valeur propre dominante) et deux racines complexes conjuguées α et $\bar{\alpha}$ telles $|\alpha| < 1$. Étant donné un mot $w \in A^*$, on définit le *vecteur abélien* \vec{w} comme étant le vecteur colonne

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} |w|_1 \\ |w|_2 \\ |w|_3 \end{pmatrix}$$

où $|w|_i$ est le nombre de fois que la lettre i apparaît dans le mot w . Cela permet d'écrire la relation entre le vecteur abélien de l'image du mot w par le morphisme σ et le vecteur abélien de w :

$$\overrightarrow{\sigma(w)} = M_\sigma \cdot \vec{w}.$$

De plus, à la limite, l'itération de la substitution σ engendre un mot dont le vecteur abélien tend vers le vecteur propre associé à la valeur propre dominante de M_σ .

Lemme 4.10. (Rauzy, 1982) *Soit $w \in A^*$. Alors,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\sigma^n(w)|} \overrightarrow{\sigma^n(w)} = \begin{pmatrix} 1/\beta \\ 1/\beta^2 \\ 1/\beta^3 \end{pmatrix}$$

où β est la racine réelle positive $\beta > 1$ (la valeur propre dominante) du polynôme $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$.

Dans son article, Rauzy s'intéresse aux différences

$$\frac{1}{\beta^1}n - |U_n|_1, \quad \frac{1}{\beta^2}n - |U_n|_2, \quad \frac{1}{\beta^3}n - |U_n|_3$$

(dont la somme vaut zéro) pour les préfixes du point fixe infini de σ . Il s'avère que ces valeurs sont bornées (Lothaire, 2005, Proposition 10.7.4) et définissent la fractale de Rauzy. La fractale bornée pave le plan par translation et est une interprétation géométrique du système dynamique symbolique défini par la conjugaison sur le mot de Tribonacci. Cela signifie aussi que les vecteurs abéliens des préfixes U_n sont une bonne approximation discrète de la droite euclidienne de vecteur directeur $[1/\beta, 1/\beta^2, 1/\beta^3]^\top \approx [0.5437, 0.2956, 0.1607]^\top$. Plus précisément, on définit la droite discrète comme la suite de vecteurs $(\overrightarrow{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ illustrée à la Figure 4.5 dont les premières valeurs sont

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (3, 1, 1), (3, 2, 1), (4, 2, 1), (5, 2, 1), (5, 3, 1).$$

Le mot de Tribonacci fait partie de la famille des suite de Arnoux-Rauzy (Arnoux et Rauzy, 1991) dont la complexité en facteur est $2n + 1$. De plus, dans un article récent (Richomme, Saari et Zamboni, 2010), les auteurs ont démontré de deux manières que le mot de Tribonacci est 2-équilibré. Ainsi, le mot de Tribonacci généralise bien en trois dimensions ce que sont les mots sturmiens et les droites discrètes en dimension deux.

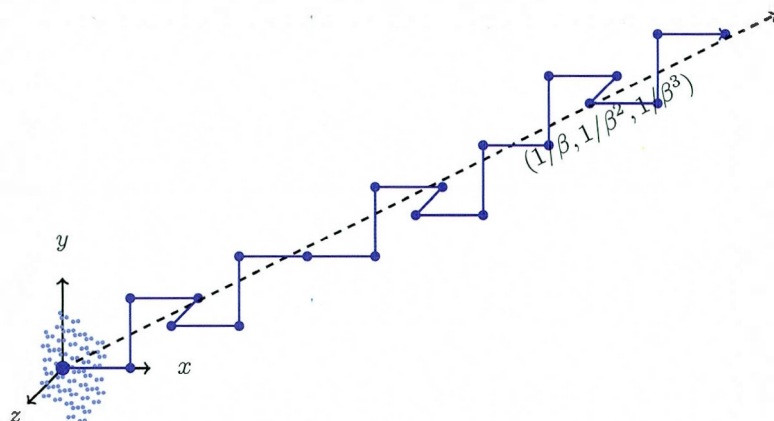


Figure 4.5 La droite discrète codée par le mot de Tribonacci.

Une question émerge donc de cet exemple. Existe-t-il des mots définissant une droite discrète 3D dont la complexité en facteurs est linéaire et dont l'équilibre des lettres est borné ? Si oui, comment les construire ? Cette question est reliée à la conjecture de Pisot. Les prochaines sections donnent des réponses et des pistes de réponse à ces questions.

4.6 Algorithmes de fractions continues multidimensionnelles

Pour calculer le pgcd de deux nombres $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, il n'y a pas mille façons. On soustrait itérativement le plus petit nombre au plus grand jusqu'à ce qu'on obtienne $(0, g)$ ou $(g, 0)$ où $g \in \mathbb{N}$ est le pgcd cherché. Pour accélérer le processus, on peut procéder multiplicativement en soustrayant autant de fois que possible le plus petit au plus grand. Comme on l'a vu à la section 4.1.1, ce procédé permet de générer un segment discret dont le vecteur directeur est (p, q) .

Au-delà de deux nombres, le procédé n'est plus unique. En particulier, pour trouver le pgcd de trois nombres (p, q, r) , plusieurs stratégies sont possibles, toutes aussi variables les unes que les autres. De telles méthodes dont la convergence et les propriétés ergodiques ont été formalisées dans (Schweiger, 2000; Brentjes, 1981) sont appelées *algorithmes de fractions continues multidimensionnelles*.

Algorithme de **Brun** : soustraire la valeur médiane de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (1, 4, 6) \rightarrow (1, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 0, 2) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1).$$

Algorithme de **Selmer** : soustraire la plus petite de la plus grande :

$$\begin{aligned} (7, 4, 6) &\rightarrow (3, 4, 6) \rightarrow (3, 4, 3) \rightarrow (3, 1, 3) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 2) \\ &\rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1) \end{aligned}$$

D'autres stratégies consistent à faire deux soustractions soutraire en même temps.

Algorithme de **Poincaré** : soustraire la plus petite valeur de la médiane et soustraire la valeur médiane de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (1, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$$

Algorithme de **Arnoux-Rauzy** : soustraire les deux plus petites valeurs de la plus grande :

$$(7, 4, 6) \rightarrow \text{Ne s'applique pas dans } \mathbb{R}_+^3.$$

Algorithme **Fully subtractive** : soustraire la plus petite valeur des deux autres :

$$(7, 4, 6) \rightarrow (3, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 0)$$

Pour la suite, il est nécessaire de donner des définitions plus formelles de ces méthodes.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3$ et soit τ la permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ qui ordonne les coordonnées x_1, x_2, x_3 en ordre croissant :

$$x_{\tau(1)} \leq x_{\tau(2)} \leq x_{\tau(3)}.$$

Pour chaque algorithme, on définit une fonction $\mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3 : x \mapsto x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$. Les règles définissant les fonctions $T_B, T_S, T_P, T_{AR}, T_{FS} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ sont décrites dans le

tableau ci-bas.

Algorithme	En mots	Règle
Brun	Soustraire la médiane de la plus grande.	$T_B(x) = x'$ où $\begin{cases} x'_{\tau(1)} = x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(2)} = x_{\tau(2)} \\ x'_{\tau(3)} = x_{\tau(3)} - x_{\tau(2)} \end{cases}$
Selmer	Soustraire la plus petite de la plus grande.	$T_S(x) = x'$ où $\begin{cases} x'_{\tau(1)} = x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(2)} = x_{\tau(2)} \\ x'_{\tau(3)} = x_{\tau(3)} - x_{\tau(1)} \end{cases}$
Poincaré	Soustraire la plus petite de la médiane et la médiane de la plus grande.	$T_P(x) = x'$ où $\begin{cases} x'_{\tau(1)} = x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(2)} = x_{\tau(2)} - x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(3)} = x_{\tau(3)} - x_{\tau(2)} \end{cases}$
Arnoux- Rauzy	Soustraire les deux plus petites de la plus grande.	$T_{AR}(x) = x'$ où $\begin{cases} x'_{\tau(1)} = x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(2)} = x_{\tau(2)} \\ x'_{\tau(3)} = x_{\tau(3)} - x_{\tau(2)} - x_{\tau(1)} \end{cases}$
Fully sub- tractive	Soustraire la plus petite des deux autres.	$T_{FS}(x) = x'$ où $\begin{cases} x'_{\tau(1)} = x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(2)} = x_{\tau(2)} - x_{\tau(1)} \\ x'_{\tau(3)} = x_{\tau(3)} - x_{\tau(1)} \end{cases}$

D'autres fonctions que nous avons introduites (Berthé et Labbé, 2011b) consistent à fusionner certaines fonctions et particulièrement à utiliser **Arnoux-Rauzy** lorsque c'est possible. Les règles qui les définissent figurent dans le tableau suivant.

Algorithme	Règle
Arnoux-Rauzy-Brun	$T_{ARB}(x) = \begin{cases} T_{AR}(x) & \text{si } x_{\tau(3)} \geq x_{\tau(2)} + x_{\tau(1)}, \\ T_B(x) & \text{sinon.} \end{cases}$
Arnoux-Rauzy-Selmer	$T_{ARS}(x) = \begin{cases} T_{AR}(x) & \text{si } x_{\tau(3)} \geq x_{\tau(2)} + x_{\tau(1)}, \\ T_S(x) & \text{sinon.} \end{cases}$
Arnoux-Rauzy-Poincaré	$T_{ARP}(x) = \begin{cases} T_{AR}(x) & \text{si } x_{\tau(3)} \geq x_{\tau(2)} + x_{\tau(1)}, \\ T_P(x) & \text{sinon.} \end{cases}$
Arnoux-Rauzy-Fully subtractive	$T_{ARFS}(x) = \begin{cases} T_{AR}(x) & \text{si } x_{\tau(3)} \geq x_{\tau(2)} + x_{\tau(1)}, \\ T_{FS}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour étudier les propriétés dynamiques et métriques de ces algorithmes, il est nécessaire de les renormaliser. Alors à chaque fonction $T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ est associée une fonction de Gauss \bar{T} induite par T :

$$\begin{aligned} \bar{T} : \Delta_2 &\rightarrow \Delta_2 \\ x &\mapsto \frac{T(x)}{|T(x)|_1} \end{aligned}$$

où Δ_2 est le simplexe de dimension 2

$$\Delta_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

et $|x|_1 = x_1 + x_2 + x_3$. Le comportement de la fonction de Gauss \bar{T} peut être différent de la fonction T . Par exemple, dans (Nogueira, 1995), il a été démontré que T_P n'est pas ergodique, mais que \bar{T}_P est ergodique.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3$ et soit τ la permutation qui ordonne les coordonnées x_1, x_2, x_3 en ordre croissant. Pour chaque fonction $T \in \{T_B, T_S, T_P, T_{AR}, T_{FS}\}$, il existe une matrice 3 par 3 à coefficients positifs qui dépend de τ telle que $x^\top = M \cdot T(x)^\top$. Par exemple, avec $x = (7, 4, 6)$, on a

$$T_P(7, 4, 6) = (7 - 6, 4, 6 - 4) = (1, 4, 2)$$

et

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont exactement celles indiquées dans le Tableau 4.3 conjuguées par la matrice de permutation P_τ . De plus, elles respectent les équations

$$\begin{aligned} x^\top &= P_\tau M_B P_\tau^{-1} \cdot T_B(x)^\top, \\ x^\top &= P_\tau M_S P_\tau^{-1} \cdot T_S(x)^\top, \\ x^\top &= P_\tau M_P P_\tau^{-1} \cdot T_P(x)^\top, \\ x^\top &= P_\tau M_{AR} P_\tau^{-1} \cdot T_{AR}(x)^\top, \\ x^\top &= P_\tau M_{FS} P_\tau^{-1} \cdot T_{FS}(x)^\top. \end{aligned}$$

Algorithme	Matrice	Substitution
Brun	$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma_B: \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$
Selmer	$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma_S: \begin{array}{l} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$
Poincaré	$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma_P: \begin{array}{l} 1 \mapsto 123 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$
Arnoux-Rauzy	$M_{AR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma_{AR}: \begin{array}{l} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$
Fully subtractive	$M_{FS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sigma_{FS}: \begin{array}{l} 1 \mapsto 123 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$

Tableau 4.3 Matrices canoniques et substitutions associées à chaque algorithme.

Par exemple, avec $x = (7, 4, 6)$, on a $\tau = (123)$, car

$$x_{\tau(1)} = x_2 = 4 \leq x_{\tau(2)} = x_3 = 6 \leq x_{\tau(3)} = x_1 = 7$$

et on a bien l'équation suivante

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= P_\tau \cdot M_P \cdot P_\tau^{-1} \cdot T_P(7, 4, 6)^\top. \end{aligned}$$

Chacune des matrices de l'ensemble $\{M_B, M_S, M_P, M_{AR}, M_{FS}\}$ sont les matrices d'incidence des substitutions de l'ensemble $\{\sigma_B, \sigma_S, \sigma_P, \sigma_{AR}, \sigma_{FS}\}$ définies dans le Tableau 4.3.

4.7 Droites 3D engendrées par substitutions

Un algorithme de fractions continues 3-dimensionnelles consiste à appliquer itérativement une fonction $T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ sur un vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}_+^3$ créant ainsi une suite de vecteurs

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots$$

une suite de permutations

$$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$$

et une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices à coefficients positifs telles que

$$\mathbf{u}_k = M_k \cdot \mathbf{u}_{k+1}$$

pour tout $k \geq 0$. Chaque matrice M_k est conjuguée par la permutation τ_k à une matrice M'_k de l'ensemble $\{M_B, M_S, M_P, M_{AR}, M_{FS}\}$:

$$M_k = P_{\tau_k} \cdot M'_k \cdot P_{\tau_k}^{-1}.$$

Si une et une seule des coordonnées de \mathbf{u}_k est nulle, alors on applique toujours l'algorithme **Brun** de sorte que $M'_k = M_B$. À chaque matrice M_k , on associe une substitution $\sigma_k = \tau_k \cdot \sigma'_k \cdot \tau_k^{-1}$ où $\sigma'_k \in \{\sigma_B, \sigma_S, \sigma_P, \sigma_{AR}, \sigma_{FS}\}$, dont la matrice d'incidence est M_k selon la correspondance du Tableau 4.3. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^3$, alors il existe k tel que toutes les coordonnées de \mathbf{u}_k sont nulles sauf une. Soit N le plus petit parmi ces entiers k . On a bien

$$\mathbf{u}_N \in \{(g, 0, 0), (0, g, 0), (0, 0, g)\}$$

où $g = \text{pgcd}(u_1, u_2, u_3)$. L'entier N , s'il existe, est le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir le pgcd en utilisant un algorithme donné. Selon la coordonnée non nulle de \mathbf{u}_N , on pose $\mathbf{w}_N = a^g$ avec $a \in \{1, 2, 3\}$ de sorte que $\overrightarrow{\mathbf{w}_N} = \mathbf{u}_N$. Finalement, pour $0 \leq k < N$, on définit récursivement la valeur de \mathbf{w}_k selon la règle

$$\mathbf{w}_k = \sigma_{k+1}(\mathbf{w}_{k+1}).$$

On génère ainsi un mot $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ dont le vecteur abélien est bien le vecteur initial : $\overrightarrow{\mathbf{w}} = \mathbf{u}$. Ce procédé est représenté dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \xrightarrow{M_1^{-1}} & \mathbf{u}_1 & \xrightarrow{M_2^{-1}} & \mathbf{u}_2 & \xrightarrow{M_3^{-1}} & \cdots & \xrightarrow{M_N^{-1}} & \mathbf{u}_N \\ & & & & & & & & \downarrow \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 & \xleftarrow{\sigma_1} & \mathbf{w}_1 & \xleftarrow{\sigma_2} & \mathbf{w}_2 & \xleftarrow{\sigma_3} & \cdots & \xleftarrow{\sigma_N} & \mathbf{w}_N \end{array}$$

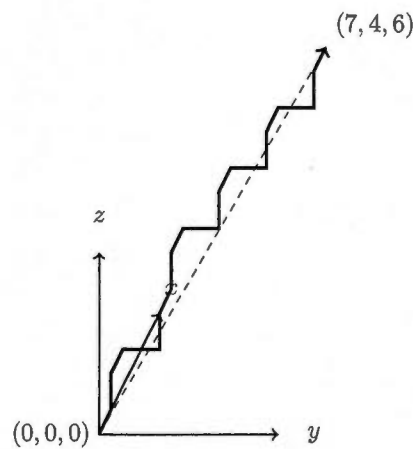
Le mot

$$\mathbf{w} = \sigma_1 \cdots \sigma_N(\mathbf{w}_N)$$

définit un segment discret 6-connexe reliant le point $(0, 0, 0)$ au point $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^3$.

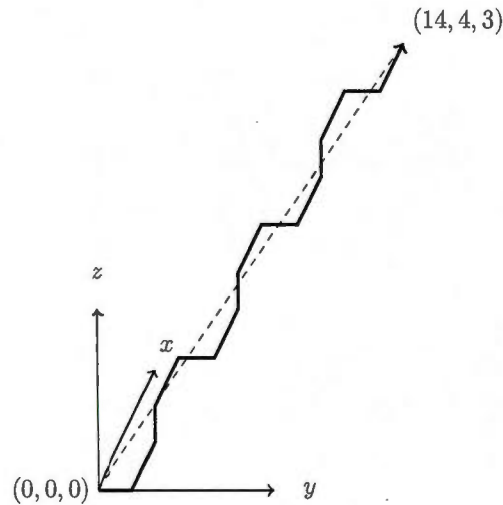
Exemple 4.11. Soit $\mathbf{u}_0 = (7, 4, 6)$. En utilisant l'algorithme Poincaré, on obtient $\mathbf{w}_N = \mathbf{w}_4 = 1$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 13123131231231231$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 1.1169.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\
 (7, 4, 6) \longleftarrow & (1, 4, 2) \longleftarrow & (1, 2, 1) \longleftarrow & (1, 1, 0) \longleftarrow & & (1, 0, 0) & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 231 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 132 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 32 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 132 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 32 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & & \\
 w_0 \longleftarrow & w_1 \longleftarrow & w_2 \longleftarrow & w_3 \longleftarrow & & w_4 &
 \end{array}$$



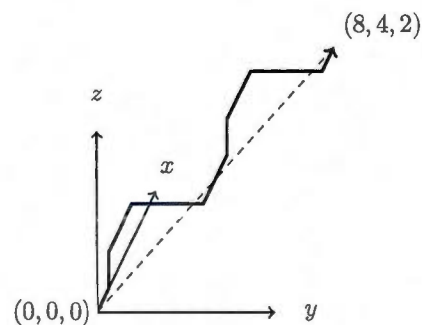
Exemple 4.12. Soit $u_0 = (14, 4, 3)$. En utilisant l'algorithme Arnoux-Rauzy, on obtient $w_N = w_6 = 2$ et $w = w_0 = 211311211311211311211$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 0.96312.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & & & \\
 (14, 4, 3) \longleftarrow & (7, 4, 3) \longleftarrow & (0, 4, 3) \longleftarrow & (0, 1, 3) \longleftarrow & (0, 1, 2) \longleftarrow & (0, 1, 1) \longleftarrow & (0, 1, 0) & & & & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 32 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & & & \\
 w_0 \longleftarrow & w_1 \longleftarrow & w_2 \longleftarrow & w_3 \longleftarrow & w_4 \longleftarrow & w_5 \longleftarrow & w_6 & & & &
 \end{array}$$



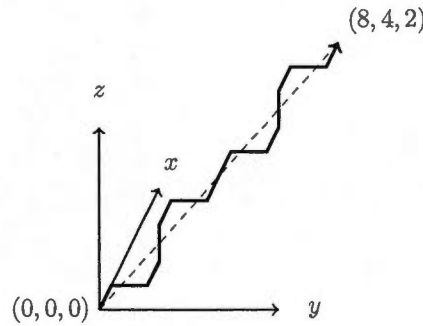
Exemple 4.13. Soit $u_0 = (8, 4, 2)$. En utilisant l'algorithme Selmer, on obtient $w_N = w_6 = 11$ et $w = w_0 = 13112211311221$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 1.3973.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\
 (8, 4, 2) \longleftarrow & (6, 4, 2) \longleftarrow & (4, 4, 2) \longleftarrow & (4, 2, 2) \longleftarrow & (2, 2, 2) \longleftarrow & (2, 2, 0) \longleftarrow & (2, 0, 0) & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 32 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & \\
 w_0 \longleftarrow & w_1 \longleftarrow & w_2 \longleftarrow & w_3 \longleftarrow & w_4 \longleftarrow & w_5 \longleftarrow & w_6 &
 \end{array}$$



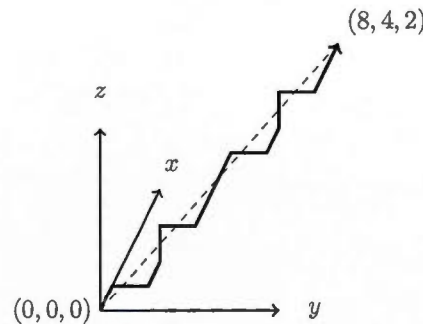
Exemple 4.14. Soit $u_0 = (8, 4, 2)$. En utilisant l'algorithme Brun, on obtient $w_N = w_4 = 11$ et $w = w_0 = 12131211213121$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 0.53452.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\
 (8, 4, 2) \longleftarrow & (4, 4, 2) \longleftarrow & (4, 0, 2) \longleftarrow & (2, 0, 2) \longleftarrow & (2, 0, 0) & & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & & \\
 \mathbf{w}_0 \longleftarrow & \mathbf{w}_1 \longleftarrow & \mathbf{w}_2 \longleftarrow & \mathbf{w}_3 \longleftarrow & \mathbf{w}_4 & &
 \end{array}$$



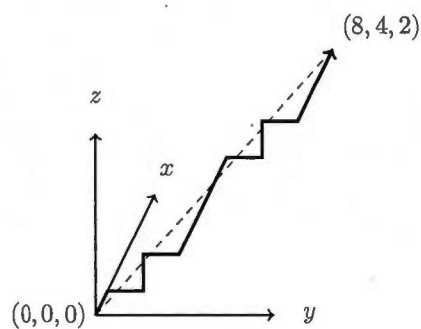
Exemple 4.15. Soit $\mathbf{u}_0 = (8, 4, 2)$. En utilisant l'algorithme Poincaré, on obtient $\mathbf{w}_N = \mathbf{w}_3 = 11$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 12132111213211$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 0.97590.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & \\
 (8, 4, 2) \longleftarrow & (4, 2, 2) \longleftarrow & (2, 2, 0) \longleftarrow & (2, 0, 0) & & & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 321 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 231 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & & & \\
 \mathbf{w}_0 \longleftarrow & \mathbf{w}_1 \longleftarrow & \mathbf{w}_2 \longleftarrow & \mathbf{w}_3 & & &
 \end{array}$$



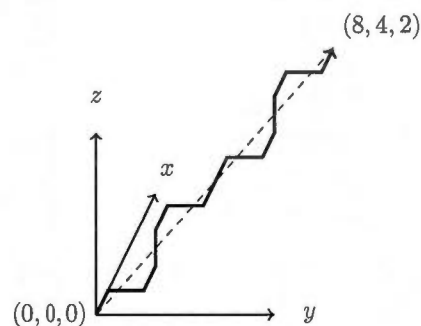
Exemple 4.16. Soit $\mathbf{u}_0 = (8, 4, 2)$. En utilisant l'algorithme Fully subtractive, on obtient $\mathbf{w}_N = \mathbf{w}_4 = 11$ et $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 12321111232111$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 1.4639.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & \\
 (8, 4, 2) \longleftarrow & (6, 2, 2) \longleftarrow & (4, 2, 0) \longleftarrow & (2, 2, 0) \longleftarrow & (2, 0, 0) & & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 321 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 231 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & & \\
 w_0 \longleftarrow & w_1 \longleftarrow & w_2 \longleftarrow & w_3 \longleftarrow & w_4 & &
 \end{array}$$



Exemple 4.17. Soit $u_0 = (8, 4, 2)$. En utilisant l'algorithme Arnoux-Rauzy, on obtient $w_N = w_3 = 11$ et $w = w_0 = 12131211213121$. La distance euclidienne du segment discret ci-dessous au segment euclidien est 0.53452.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & \\
 (8, 4, 2) \longleftarrow & (2, 4, 2) \longleftarrow & (2, 0, 2) \longleftarrow & (2, 0, 0) & & & \\
 \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 21 \\ 3 \mapsto 31 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 32 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & & & \\
 w_0 \longleftarrow & w_1 \longleftarrow & w_2 \longleftarrow & w_3 & & &
 \end{array}$$



4.7.1 Invariance sous une permutation

On dit qu'un algorithme est *invariant par permutation* τ si le mot engendré à partir du vecteur $P_\tau \cdot \mathbf{u}_0$ est égal à $\tau(\mathbf{w}_0)$ où \mathbf{w}_0 est le mot engendré par le même algorithme sur le vecteur \mathbf{u}_0 . Pour certains algorithmes, l'invariance par permutation du vecteur n'est pas vérifiée. Par exemple, l'algorithme de Arnoux-Rauzy n'est pas invariant par permutation. Par exemple, les suites de vecteurs obtenus à partir de $(1, 4, 15)$ et $(4, 1, 15)$ sont

$(1, 4, 15), (1, 4, 10), (1, 4, 5), (1, 4, 0), (1, 3, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0),$

$(4, 1, 15), (4, 1, 10), (4, 1, 5), (4, 1, 0), (3, 1, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0).$

Cela a un impact sur la qualité du segment discret engendré. Dans le premier cas, on a le mot 13332333233323332333 et dans le deuxième, 13332333133313331333. Or, ces deux mots ne sont pas obtenus l'un à partir de l'autre par échange des lettres 1 et 2.

Selon les critères de comparaison présentés à la prochaine section, le premier génère un mot dont la discrédance (voir section 4.8.2) est de 19/20, et 4/5 pour le deuxième.

4.8 Critères de comparaison

Il existe plus d'un critère pour comparer les segments discrets générés par substitutions.

Nous considérons les critères suivants :

- distance,
- discrédance,
- complexité en facteurs,
- équilibre.

Nous en rappelons les définitions dans les sous-sections suivantes.

4.8.1 Distance euclidienne

La distance d'un point $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ à la droite euclidienne D passant par l'origine $O = (0, 0, 0)$ et de vecteur directeur (a, b, c) est

$$d(P, D) = \sqrt{(x - ta)^2 + (y - tb)^2 + (z - tc)^2}$$

où

$$t = \frac{(ax + by + cz)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Soit C un chemin discret définissant une suite $(P_i)_{0 \leq i < n}$ de points de \mathbb{Z}^3 telle que $P_0 = (0, 0, 0)$ et $P_{n-1} = (a, b, c)$. On définit la distance du chemin C à la droite euclidienne D reliant les points P_0 et P_{n-1} par la valeur maximale suivante :

$$d(C, D) = \max\{d(P_i, D) : 0 \leq i < n\}.$$

Cette distance correspond à la distance d'Hausdorff entre les deux ensembles.

4.8.2 Discrépance

La *discrépance* d'un mot fini $u = u_0 \cdots u_n \in \mathcal{A}^{n+1}$ est défini comme

$$\max_{i \in \mathcal{A}, 0 \leq k \leq n} |f_i \cdot k - |u_0 \cdots u_k i||$$

où $f_i = \frac{|u|_i}{|u|}$ est la fréquence de la lettre i dans le mot u . Cette distance est considérée notamment par (Tijdeman, 1980) et (Adamczewski, 2003) et est liée à la notion d'équilibre.

Soit C un chemin discret définissant une suite $(P_k)_{0 \leq k < n}$ de points $P_k = (x_k, y_k, z_k)$ de \mathbb{Z}^3 telle que $P_0 = (0, 0, 0)$ et $P_{n-1} = (a, b, c)$. On définit la *discrépance* du chemin

comme la valeur

$$\max_{0 \leq k < n} \left\{ \left| \frac{a}{a+b+c}k - x_k \right|, \left| \frac{b}{a+b+c}k - y_k \right|, \left| \frac{c}{a+b+c}k - z_k \right| \right\}.$$

4.8.3 Complexité en facteurs

La complexité en facteurs consiste à compter le nombre de facteurs d'une longueur donnée dans un mot w :

$$p_w(n) = |L_n(w)|.$$

4.8.4 Équilibre

Sur un alphabet à trois lettres, il existe des vecteurs (a, b, c) tels qu'aucun mot w tel que $\vec{w} = (a, b, c)$ n'est 1-équilibré. Le vecteur $(8, 5, 3)$ en est un exemple.

```
def word_iterator(a,b,c):
    W = Words([0,1,2])
    for p in Permutations([0]*a + [1]*b + [2]*c):
        yield W(p)

sage: any(w.is_balance() for w in word_iterator(8, 5, 3))
False
```

Il faut donc assouplir la notion d'équilibre et une bonne façon pour y arriver est de calculer la plus petite valeur k telle qu'un mot est k -équilibré. L'équilibre de $w = w_0 \cdots w_n \in \mathcal{A}^{n+1}$ est défini comme

$$\text{Eq}(w) = \sup_{i \in \mathcal{A}, |u|=|v|} ||u|_i - |v|_i|,$$

où u et v sont des facteurs de w de la même longueur $|u| = |v|$.

4.9 L'exemple (41, 11, 8)

Soit $\mathbf{u}_0 = (41, 11, 8)$. Dans le tableau suivant, nous avons illustré des statistiques pour les mots \mathbf{w}_0 générés par les 5 algorithmes additifs introduits plus tôt. La variable N représente le nombre d'étapes nécessaires à l'algorithme pour arrêter, c'est-à-dire pour obtenir le pgcd.

Algorithme	Distance euclidienne	Discrépance	Eq(w_0)	N
Fully subtractive	8.1866	$247/30 = 8.233$	15	29
$w_0 = 123211321132123211321111321232111111111111111111111$				
Poincaré	5.0379	$76/15 = 5.066$	8	17
$w_0 = 121321132111132111213211321111132111213211321111111111111$				
Selmer	1.4005	$6/5 = 1.200$	4	15
$w_0 = 131111231111221311112121311112113111123111122131111211311112$				
Brun	1.0348	$21/20 = 1.050$	3	10
$w_0 = 132111211113211113211121111321111321111321112111132111132111$				
Arnoux-Rauzy	0.90993	$4/5 = 0.800$	2	8
$w_0 = 121131121131121131121113112113112113112111211311211311211$				

On remarque que pour le vecteur $u = (41, 11, 8)$, les algorithmes **Poincaré** et **Fully subtractive** sont ceux qui se comportent le moins bien tant pour la distance que pour l'équilibre. En fait, ils se comportent mal lorsque la valeur la plus grande est beaucoup plus grande que les autres. Comme on le voit sur la suite de vecteurs (u_k) , ces deux algorithmes font deux soustractions à la fois ce qui a un effet sur les plus petites valeurs et les réduit trop rapidement :

$$\begin{aligned}
 \text{Fullysubtractive} \quad & (41, 11, 8) \rightarrow (33, 3, 8) \rightarrow (30, 3, 5) \rightarrow (27, 3, 2) \rightarrow (25, 1, 2) \\
 & \rightarrow (24, 1, 1) \rightarrow (23, 1, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (1, 0, 0) \\
 \text{Poincaré} \quad & (41, 11, 8) \rightarrow (30, 3, 8) \rightarrow (22, 3, 5) \rightarrow (17, 3, 2) \rightarrow (14, 1, 2) \\
 & \rightarrow (12, 1, 1) \rightarrow (11, 1, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (1, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Comme les algorithmes **Selmer**, **Brun** et **Arnoux-Rauzy** ne touchent qu'à la valeur la plus grande, ils se comportent mieux pour le vecteur $(41, 11, 8)$. C'est l'algorithme **Arnoux-Rauzy** qui est le meilleur à tous les points de vue. Comme il soustrait la somme des deux plus petites valeurs de la plus grande, c'est celui qui parvient au pgcd

en le moins d'étapes :

$$\begin{aligned} \textbf{Arnoux - Rauzy} \quad (41, 11, 8) &\rightarrow (22, 11, 8) \rightarrow (3, 11, 8) \rightarrow (3, 0, 8) \rightarrow (3, 0, 5) \\ &\rightarrow (3, 0, 2) \rightarrow (1, 0, 2) \rightarrow (1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0) \end{aligned}$$

Toutefois, l'algorithme **Arnoux-Rauzy** n'est pas défini pour tous les vecteurs. Il faut que la plus grande valeur soit plus grande que la somme des deux autres et ce à chaque itération de la fonction T_{AR} .

4.10 Résultats expérimentaux

Dans cette section, nous étudions les algorithmes décrits plus tôt et comparons leurs comportements. Expérimentalement, nous générons tous les mots de taille N sur trois lettres pour certaines valeurs de N . Puis, nous calculons des statistiques pour les mots et segments discrets ainsi générés. Par exemple, à la Figure 4.6, la discrédance de tous les segments discrets de longueur $N = 20$ générés par l'algorithme **Poincaré** sont représentés graphiquement. Les valeurs minimum et maximum de même que la moyenne et l'écart type sont affichés dans un tableau à gauche.

Les données de discrédance pour les segments discrets de taille $N = 100$ générés par les algorithmes **Brun**, **Selmer**, **Fully subtractive**, **Poincaré**, **Arnoux-Rauzy** se trouvent dans les Figures 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11. Les Figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 illustrent les résultats pour les algorithmes **Arnoux-Rauzy-Selmer**, **Arnoux-Rauzy-Brun**, **Arnoux-Rauzy-Fully subtractive** et **Arnoux-Rauzy-Poincaré**. Finalement, les données pour la discrédance pour $N = 200$ figurent dans le Tableau 4.4. Les données ne sont pas exactement les mêmes que dans l'article *Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies* de la section 4.12, car la manière de construire les substitutions à partir des matrices était différente. Dans l'article, l'ordre des lettres dans l'image d'une lettre était déterminée selon la fréquence des lettres (la plus fréquente en premier). Alors, que dans la thèse, l'ordre est simplement obtenu à partir de la permutation τ en suivant la méthode décrite à la section 4.7.

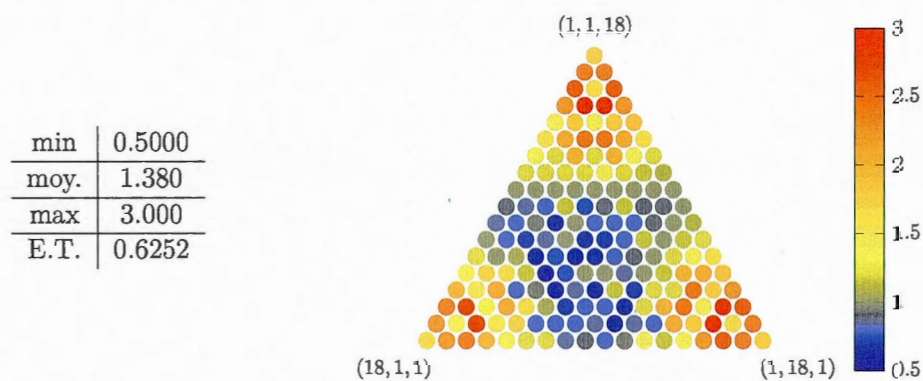


Figure 4.6 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 20$ pour l'algorithme **Poincaré**.

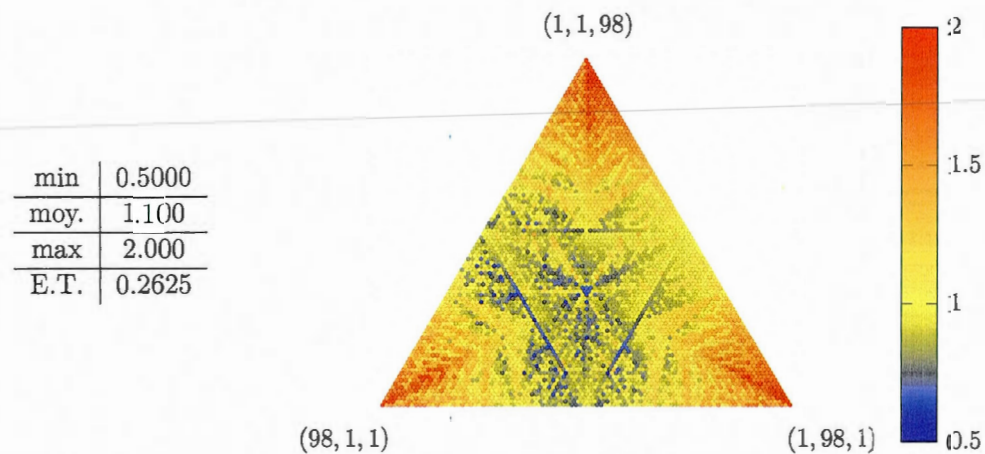


Figure 4.7 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Brun**.

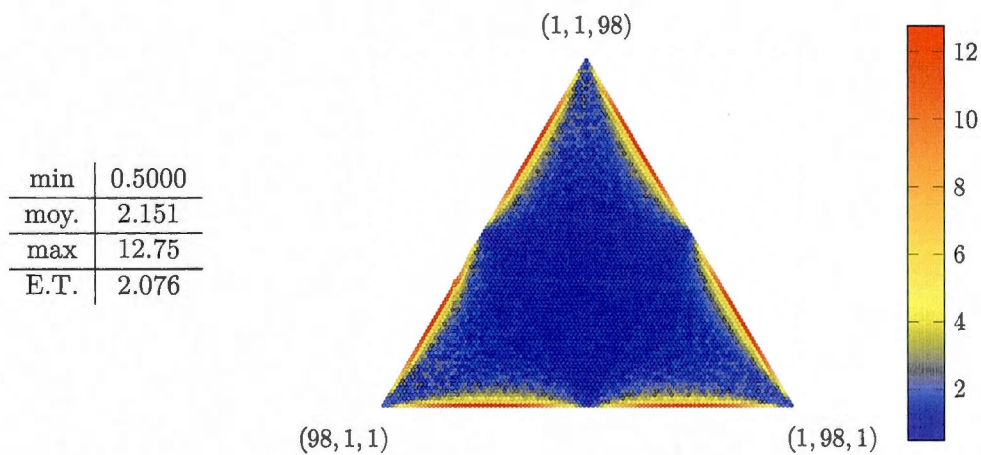


Figure 4.8 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Selmer**.

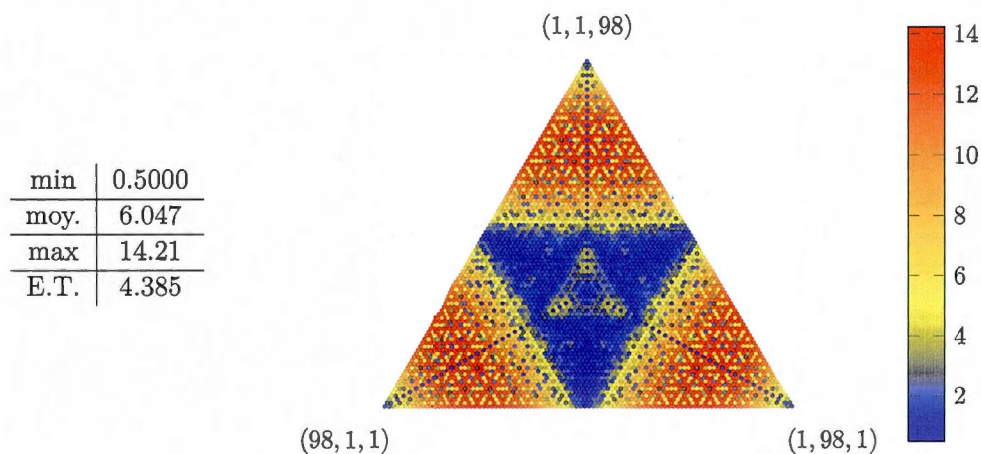


Figure 4.9 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Fully subtractive**.

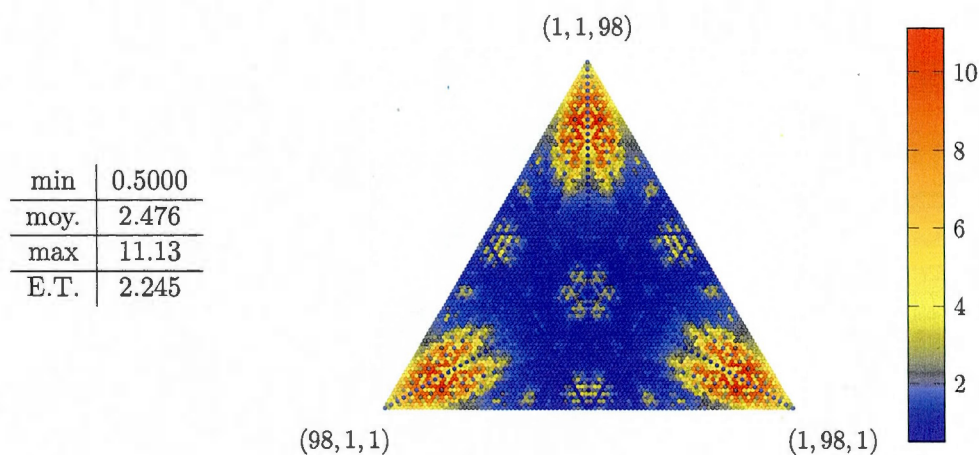


Figure 4.10 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Poincaré**.

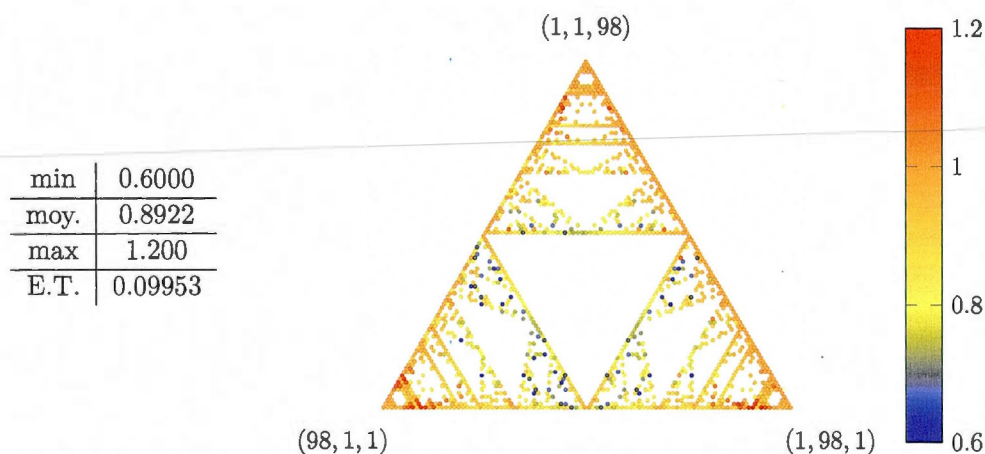


Figure 4.11 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy**. Cet algorithme n'est défini que pour les vecteurs dont la valeur maximale est plus grande que la somme des deux autres pour toutes les itérations de la fonction T_{AR} .

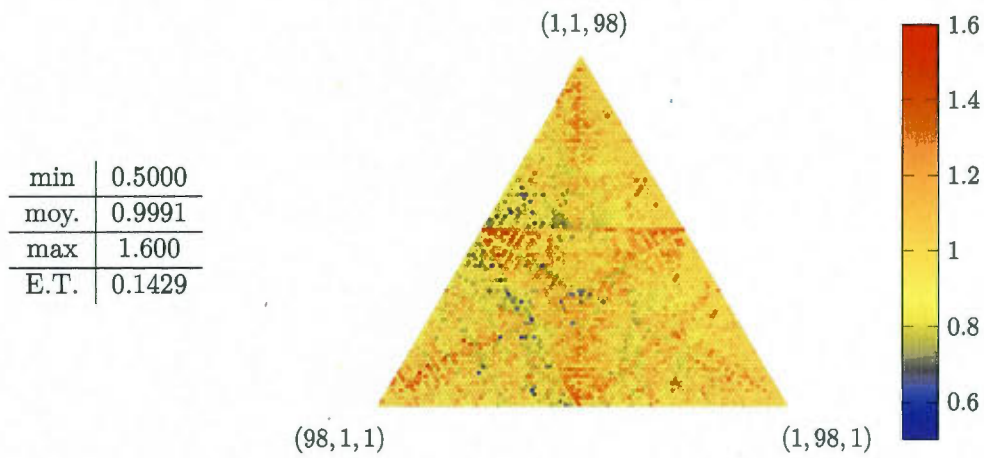


Figure 4.12 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Selmer**.

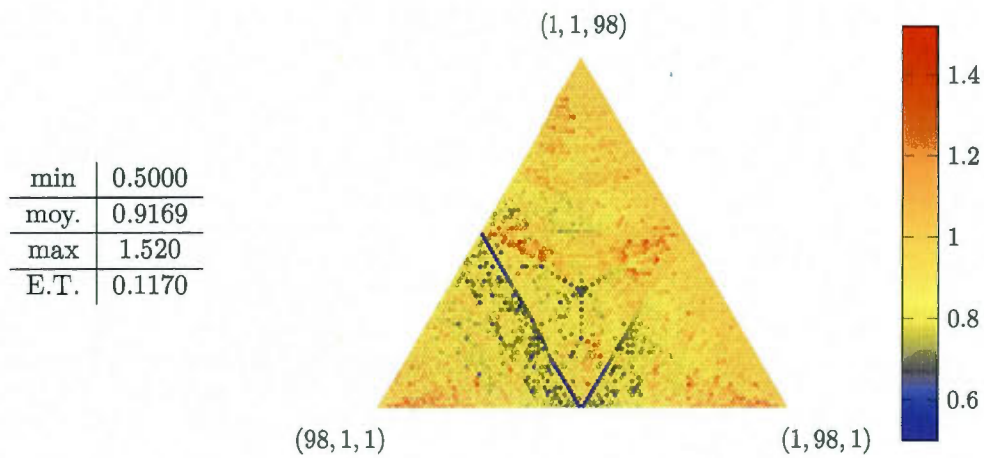


Figure 4.13 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Brun**.

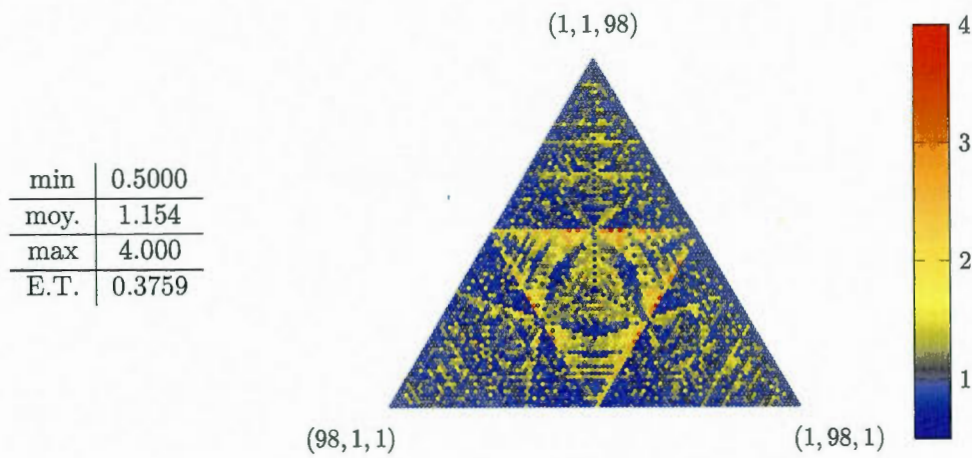


Figure 4.14 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Fully subtractive**.

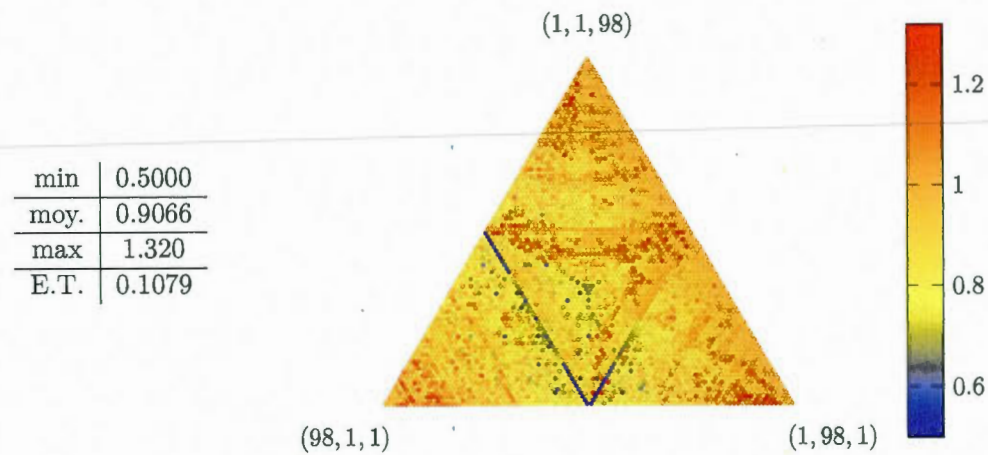


Figure 4.15 Discrépance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 100$ pour l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Poincaré**.

	Minimum	Moyenne	Maximum	Écart type
Arnoux-Rauzy	0.6000	0.9144	1.300	0.1004
Fully subtractive	0.6000	10.83	26.95	8.789
Selmer	0.5000	2.561	25.25	3.312
Brun	0.5000	1.151	2.200	0.2629
Poincaré	0.6000	3.525	20.46	4.120
Arnoux-Rauzy-Fully subtractive	0.6000	1.160	3.275	0.3512
Arnoux-Rauzy-Selmer	0.5000	1.001	1.550	0.1401
Arnoux-Rauzy-Brun	0.6000	0.9479	1.500	0.1177
Arnoux-Rauzy-Poincaré	0.6000	0.9223	1.325	0.09838

Tableau 4.4 Statistiques pour la discrédance pour les triplets d'entiers strictement positifs (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = N$ et $N = 200$.

Ainsi, comme le démontrent ces résultats expérimentaux, **Brun** est l'un des meilleurs parmi les cinq algorithmes de base : il est défini partout et donne de très bons résultats peu importe la direction choisie. Parmi les algorithmes fusionnés avec **Arnoux-Rauzy**, l'algorithme **Arnoux-Rauzy-Poincaré** surclasse les autres notamment grâce à une discrépance maximum de 1.325 pour tous les segments discrets de longueur 200.

Les deux prochaines sections contiennent les deux articles de conférences (avec Valérie Berthé) publiés sur le sujet.

4.11 *An Arithmetic and Combinatorial Approach to Three-Dimensional Discrete Lines*

An Arithmetic and Combinatorial Approach to Three-Dimensional Discrete Lines

Valérie Berthé¹ and Sébastien Labbé^{2,*}

¹ Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications,
Université Paris Diderot, Paris 7 - Case 7014
F-75205 Paris Cedex 13, France
`berthe@liafa.jussieu.fr`

² Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique,
Université du Québec à Montréal,
C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8
`labbe.sebastien@courrier.uqam.ca`

Abstract. The aim of this paper is to discuss from an arithmetic and combinatorial viewpoint a simple algorithmic method of generation of discrete segments in the three-dimensional space. We consider discrete segments that connect the origin to a given point (u_1, u_2, u_3) with co-prime nonnegative integer coordinates. This generation method is based on generalized three-dimensional Euclid's algorithms acting on the triple (u_1, u_2, u_3) . We associate with the steps of the algorithm substitutions, that is, rules that replace letters by words, which allow us to generate the Freeman coding of a discrete segment. We introduce a dual viewpoint on these objects in order to measure the quality of approximation of these discrete segments with respect to the corresponding Euclidean segment. This viewpoint allows us to relate our discrete segments to finite patches that generate arithmetic discrete planes in a periodic way.

Keywords: Discrete Segments, Discrete Lines, Christoffel words, multi-dimensional Euclid's algorithms, multi-dimensional continued fractions, substitutions.

1 Introduction

Discrete lines and segments in the plane are quite well understood and their study has already arised a vast literature on the subject (see e.g. the references in [14]). The Freeman codings of arithmetic standard discrete lines correspond to the also well-studied family of Sturmian words. For more details, see e.g. [15]. Among the factors of Sturmian words, Christoffel words play a particular role and correspond to Freeman codings of segments. The deep and fruitful connections between Sturmian words and continued fractions, on the one hand, and between Christoffel words and Euclid's algorithm, on the other hand, allows a thorough description of most of their properties (see Figure 1 for an illustration).

* With support of the NSERC. The authors also would like to thank P. Arnoux and X. Provençal for many fruitful discussions, and the referees for their valuable remarks.

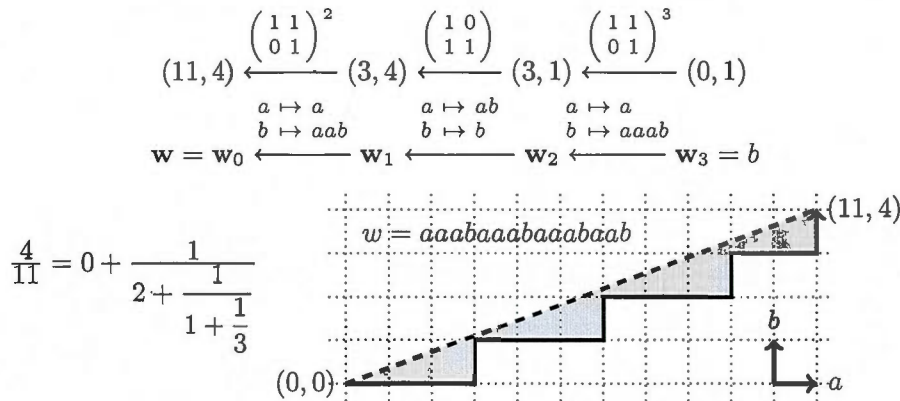


Fig. 1. It is well known that the reduction of a two-dimensional integer vector by using Euclid's algorithm allows one to construct the discrete segment (also called Christoffel word) which is such that no integer point is in the interior of the gray region. Its Freeman coding $w = aabaaabaab$ can be obtained by applying on the letter b the substitutions associated with the steps of Euclid's algorithm performed on $(11, 4)$.

There exist various strategies for defining and generating discrete lines in the three-dimensional space. With no claim for being exhaustive, let us quote e.g. [1,12,18,8,9]. The approach we follow here is motivated by the study of Sturmian words. Several generalizations of Sturmian words over a three-letter alphabet have been considered. For instance, infinite words coding trajectories in a cubic billiard have been investigated in [3]. One of their drawbacks is that they produce infinite words having a quadratic number of factors of a given length, which seems to indicate that there is no suitable continued fraction algorithm allowing one to describe them. This prevents in particular multiscale analysis. Another direction of generalization of Sturmian words consists in working with balanced words over a three-letter alphabet. However balanced words over a higher-alphabet do not seem to be good candidates for describing discrete segments in the space, as shown in [13]. The family of Arnoux-Rauzy words [4] provides a third fruitful way of generalizing Sturmian words. They have a linear number of factors of a given length ($2n + 1$ factors of length n), and can be described in terms of a multi-dimensional continued fraction algorithm. Nevertheless this algorithm is not defined everywhere, and thus, they cannot be used to approximate all the slopes in the space. For more details, see the discussion and the references in [5].

Our strategy here works in the reverse direction: we start from Euclid's algorithms that are defined everywhere and we associate with them families of words. More precisely, we want to construct discrete segments that connect the origin to a given point (u_1, u_2, u_3) with coprime nonnegative integer coordinates. We apply a three-dimensional Euclid's algorithm to the triple (u_1, u_2, u_3) (see Section 2.1). In Section 2.2 we associate with the steps of the algorithm substitutions, that is, rules that replace letters by words, which allow us to generate the Freeman coding of the discrete segment.

We thus obtain in Section 3 a simple algorithmic way for producing discrete segments and lines by means of substitutions and generalized Euclid's algorithms which can allow a multiscale approach for their study. Our description is both analytic and arithmetic. Note that by discrete segment, we mean here broken lines constructed by concatenating unit steps oriented along the three coordinate axes. Based on the quality of approximation of the underlying multi-dimensional continued fraction algorithms that are used (see Remark 2 below), we expect these segments to be good candidates for discretizations of Euclidean segments and lines, which is supported by the experimental studies we conducted.

Section 4 aims at getting a theoretical and dynamical understanding of the way these segments approximate Euclidean segments by introducing a discrete plane that is transverse to the original direction (u_1, u_2, u_3) . The present paper relies on a formalism that has been previously introduced in a different context in [2]. The new notions that are introduced here correspond mainly to Definition 3 and to the choice of the normal vector \mathbf{v} of the transverse plane in Equation (1).

2 Preliminaries

Let $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ be a vector with coprime entries in \mathbb{N}^3 . We want to introduce a discrete line approximating the vectorial line directed by the vector \mathbf{u} in \mathbb{R}^3 .

2.1 Generalized Euclid's Algorithm

In the one-dimensional case, most of the existing continued fraction algorithms strongly rely on Euclid's algorithm: starting from two nonnegative numbers a and b , one subtracts the smallest one to the largest one. If one performs only one subtraction at each step, one obtains the so-called *additive* version of Euclid's algorithm. If one performs in one step as much subtractions as possible (i.e., if $0 \leq b \leq a$, a is replaced by $a - [a/b]b$), one gets a *multiplicative* algorithm. In the multi-dimensional case, there is no such canonical algorithm, and several different definitions have been proposed (see [17] for a summary). Indeed starting from more than two numbers, it is not clear to decide which operation is to be performed on these numbers, hence the diversity of existing generalizations of Euclid's algorithm (see Section 2.3).

We will thus use the following framework for defining versions of three-dimensional generalizations of Euclid's algorithms. Let \mathcal{M}_E be the set of 3×3 matrices $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ with entries in $\{0, 1\}$ having only 1's on the diagonal and exactly one nonzero entry m_{ij} with $i \neq j$. Let \mathcal{M}_P be the set of 3×3 matrices that are *permutation matrices*, that is, they have entries in $\{0, 1\}$, and only one nonzero coefficient on each line and on each column. Matrices of \mathcal{M}_E and of \mathcal{M}_P are called *elementary matrices*. We set \mathcal{M} to be the set of finite products of matrices of $\mathcal{M}_E \cup \mathcal{M}_P$.

Definition 1 (Three-dimensional Euclid's algorithm). *Let*

$$X \subset \{(u_1, u_2, u_3) \mid \forall i, u_i \in \mathbb{N}, \text{ and } \gcd(u_1, u_2, u_3) = 1\}$$

and let $X_f \subset X$. Elements of X_f are called terminal.

A three-dimensional Euclid's algorithm is a map $T : X \rightarrow X$ such that $T(x) = x$ for all $x \in X_f$, for any $u \in X$ there is $M \in \mathcal{M}$ satisfying $u = MT(u)$, and for every $u \in X$ there exists N such that $T^N(u) \in X_f$.

2.2 Euclid's Substitutions

Let us consider a finite set of letters \mathcal{A} called *alphabet*. A (finite) *word* is an element of the free monoid \mathcal{A}^* generated by \mathcal{A} . A *substitution* σ over the alphabet \mathcal{A} is an endomorphism of the free monoid \mathcal{A}^* . It is completely defined by its image on the letters of the alphabet. For $i \in \{1, 2, 3\}$ and for $w \in \{1, 2, 3\}^*$, let $|w|_i$ stand for the number of occurrences of the letter i in the word w . The map

$$l : \{1, 2, 3\}^* \rightarrow \mathbb{N}^n, w \mapsto {}^t(|w|_1, |w|_2, |w|_3)$$

is called the *abelianization map*. Notice that in the literature, this map is also referred to as the *Parikh mapping*. Let σ be a substitution on $\{1, 2, 3\}^*$. Its *incidence matrix* or *abelianized matrix* $M_\sigma = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ is defined as the square matrix with entries $m_{i,j} = |\sigma(j)|_i$ for all i, j . We say that σ is *unimodular* if $\det(M_\sigma) = \pm 1$.

Definition 2 (Three-dimensional Euclid's substitutions). Let T be a three-dimensional Euclid's algorithm. With each matrix $M \in \mathcal{M}$ produced by the algorithm, we associate a substitution whose incidence matrix is given by M .

Remark 1. Given a matrix produced by a Euclid's algorithm, there exist several substitutions having this matrix as incidence matrix. The substitutions generating words that are Freeman codings of discrete segments are known to be Sturmian. Given an incidence matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ of a Sturmian substitution, only $a+b+c+d-1$ substitutions having this matrix as incidence matrix are Sturmian (i.e., preserve discrete segments). For more details, see [15] and the references therein. Hence, the choice of a substitution associated with an incidence matrix can play an important role. This is why we try to privilege as much as possible here additive steps. We thus usually recover elementary matrices or simple products of them, which reduces the choices for the associated substitution.

Example 1. With the elementary matrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ are associated

$$\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3 \text{ and } \tilde{\sigma} : 1 \mapsto 21, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3.$$

2.3 A Zoo of Algorithms

We recall here the most classical generalizations of Euclid's algorithms which have lead to well-studied multi-dimensional continued fraction algorithms such as those discussed in [17]:

- Jacobi-Perron: let $0 \leq u_1, u_2 \leq u_3$

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_2 - [\frac{u_2}{u_1}]u_1, u_3 - [\frac{u_3}{u_1}]u_1, u_1),$$

- Brun: we subtract the second largest entry to the largest one; for instance, if $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3 - u_2);$$

- Poincaré: we subtract the second largest entry to the largest one, and the smallest entry to the second largest one; for instance, if $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_2),$$

- Selmer: we subtract the smallest positive entry to the largest one; for instance, if $0 < u_1 \leq u_2 \leq u_3$

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3 - u_1),$$

- Fully subtractive: we subtract the smallest positive entry to all the largest ones; for instance, if $0 < u_1 \leq u_2 \leq u_3$

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_1).$$

We have recalled here Jacobi-Perron algorithm in its multiplicative form for the sake of clarity, but an additive version of this algorithm can be given. Furthermore, one checks that we can chose as terminal set for all these algorithms the set

$$X_f = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset X,$$

by possibly applying the two-dimensional Euclid's algorithm once the first coordinate has reached the value 0 in the Jacobi-Perron case.

Remark 2. The choice of these algorithms is motivated by the quality of approximation they provide. Indeed, Jacobi-Perron and Brun algorithm are known to provide almost everywhere exponential convergence (see [10]).

Example 2. Let $u = (2, 2, 3)$. By using Brun algorithm, one has $u_0 = (2, 2, 3)$, $u_1 = (2, 2, 1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, $u_4 = (0, 0, 1)$. By using Poincaré algorithm, one obtains $u_0 = (2, 2, 3)$, $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 0, 0)$.

3 A Generation Method for Discrete Segments

Let us apply to u a finite sequence of steps under the action of one of the three-dimensional Euclid's algorithm T given in Section 2.3 with X_f defined as above together with a choice of Euclid's substitutions associated with the produced matrices. One has $u = M_1 \cdots M_N u_N$, where the vector $u_N \in X_f$ has only two coordinates equal to 0, and one coordinate equal to 1. Let $w_N \in \{1, 2, 3\}$ be the unique word (of length one) such that $l(w_N) = u_N$. The associated Euclid's substitutions are denoted by σ_n , for $1 \leq n \leq N$ (see the diagram below).

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \xrightarrow{M_1^{-1}} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{M_2^{-1}} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{M_3^{-1}} \dots \xrightarrow{M_N^{-1}} \mathbf{u}_N \in X_f$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 \xleftarrow{\sigma_1} \mathbf{w}_1 \xleftarrow{\sigma_2} \mathbf{w}_2 \xleftarrow{\sigma_3} \dots \xleftarrow{\sigma_N} \mathbf{w}_N \in \{1, 2, 3\}$$

Definition 3 (Discrete segment). The discrete segment associated with the vector \mathbf{u} and with the three-dimensional Euclid's algorithm T is defined as the broken line with integer vertices that starts from the origin, whose Freeman coding is given by the coding word

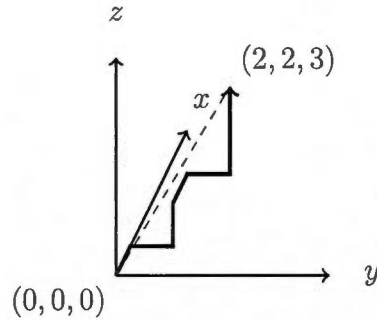
$$\mathbf{w} := \sigma_1 \cdots \sigma_N(\mathbf{w}_N).$$

In other words, the vertices of this broken line are given by the abelianized by l of the prefixes of the word \mathbf{w} .

Example 3. If $\mathbf{u} = (2, 2, 3)$ and by using Poincaré's algorithm, one has $\mathbf{w}_N = \mathbf{w}_3 = 1$ and $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 = 1231233$.

$$\begin{array}{ccccccc} (2, 2, 3) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} & (2, 0, 1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} & (1, 0, 1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} & (1, 0, 0) \\ \begin{array}{l} 1 \mapsto 123 \\ 2 \mapsto 23 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 123 \\ 3 \mapsto 13 \end{array} & & \begin{array}{l} 1 \mapsto 13 \\ 2 \mapsto 123 \\ 3 \mapsto 3 \end{array} & & \\ \mathbf{w}_0 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_1 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{w}_3 \end{array}$$

The discrete segment is depicted below. Its Euclidean distance to the Euclidean segment is 1.3720.



4 A Dual Viewpoint

In this section, we introduce the following notation: one sets $M_{i..j} := M_i \cdots M_j$ and $\sigma_{i..j} := \sigma_i \cdots \sigma_j$ for $1 \leq i, j \leq N$. Hence, the incidence matrix of the substitution $\sigma_{i..j}$ is $M_{i..j}$.

In order to study the quality of approximation of the vector line directed by \mathbf{u} provided by the discrete segment \mathbf{w} , we introduce a transverse plane that does

not contain vector \mathbf{u} . Such a plane can be described by its normal vector \mathbf{v} that we chose with positive entries and not collinear with \mathbf{u} . The vector having all entries equal to 1 is denoted by $\mathbf{1}$. We chose for \mathbf{v}

$$\mathbf{v} := {}^t M_{1..N} \cdot \mathbf{1} = {}^t M_N \cdots {}^t M_1 \cdot \mathbf{1}. \quad (1)$$

We furthermore write $\mathbf{w} = z_1 \cdots z_k \cdots z_{|\mathbf{w}|}$ where $z_k \in \{1, 2, 3\}$ are letters. The vertices of the discrete segment are thus of the form $p_k = \mathbf{l}(z_1 \cdots z_k)$, for $1 \leq k \leq |\mathbf{w}|$. The choice of vector \mathbf{v} is motivated by the following relation that we will use below

$$\begin{aligned} \langle p_k, \mathbf{1} \rangle &= \langle (M_{1..N})^{-1} \cdot p_k, {}^t M_{1..N} \cdot \mathbf{1} \rangle \\ &= \langle (M_{1..N})^{-1} \cdot p_k, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

The aim of this section is to relate vertices of the discrete segment to faces of a finite pattern of the discrete plane with normal vector \mathbf{v} via the mapping $(M_{1..N})^{-1}$, and to interpret the coding word \mathbf{w} in terms of a coding of the orbit of a point under a dynamical system acting on this discrete plane with normal vector \mathbf{v} . For that purpose, we introduce in Section 4.2 a dual notion of substitution acting on faces of discrete planes.

4.1 Discrete Planes

Let \mathbf{n} be a nonzero vector in \mathbb{N}^3 . According to [16], we recall that the arithmetic standard plane $\mathfrak{P}_{\mathbf{n}}$ of normal vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ is defined as

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{n}} = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 < \langle x, \mathbf{n} \rangle \leq \|\mathbf{n}\|_1 = n_1 + n_2 + n_3\}.$$

For $x \in \mathbb{Z}^3$ and $i \in \{1, 2, 3\}$, let (x, i^*) stand for the pointed face defined as the translation by x of the surfel generated by $\{e_1, e_2, e_3\} \setminus \{e_i\}$ (see Figure 2). We say that x is the *vertex* and i is the *type* of the pointed face (x, i^*) .

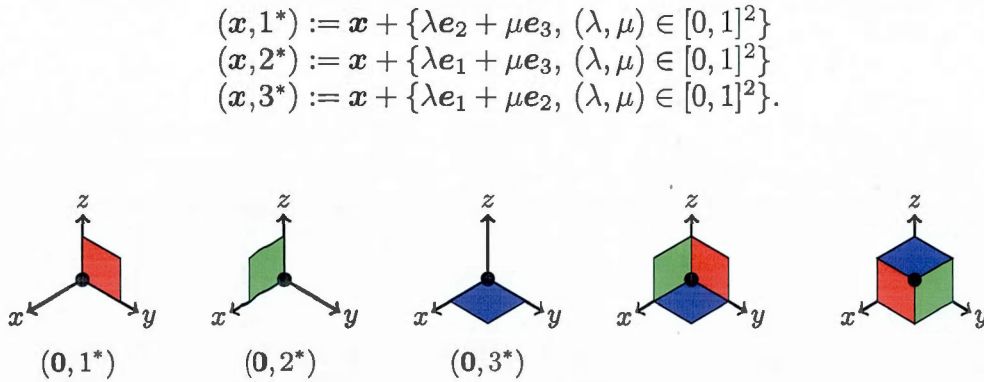


Fig. 2. Left: Geometric interpretation of faces. Right: Lower unit cube and upper unit cube. In this figure and the following, the vertex $(0, 0, 0)$ or $(1, 1, 1)$ is identified by a black dot.

We will use the following notation for translates of faces: if (x, i^*) is a face and y is a vector, then $(x, i^*) + y := (x + y, i^*)$ which extends in a natural way to union of faces. The lower unit cube refers to the set $\{(0, 1^*), (0, 2^*), (0, 3^*)\}$, whereas the upper unit cube refers to $\{(e_1, 1^*), (e_2, 2^*), (e_3, 3^*)\}$ (see Figure 2).

Let \mathcal{P}_n be the set of pointed faces satisfying

$$\mathcal{P}_n = \{(x, i^*) \mid 0 \leq \langle x, n \rangle < n_i\}. \quad (3)$$

One checks that the points of \mathfrak{P}_n are the vertices (*i.e.*, the corners) of the faces of \mathcal{P}_n . By abuse of terminology, by arithmetic discrete plane with normal vector n , we mean in all that follows this union of pointed faces \mathcal{P}_n . Note that in particular, if n has positive entries, the lower unit cube is included in \mathcal{P}_n .

Furthermore, for any vertex $p_k = l(z_1 \cdots z_k)$ of the discrete segment, one has

$$0 \leq \langle p_k, 1 \rangle \leq \langle u, 1 \rangle = \langle M_{1..N} \cdot u_N, 1 \rangle = \langle u_N, {}^t M_{1..N} \cdot 1 \rangle = \langle u_N, v \rangle = v_{w_N}.$$

Hence by (2) and (3) the vertices p_k of the discrete segment are mapped by $(M_{1..N})^{-1}$ onto vertices of faces of type w_N of the discrete plane \mathcal{P}_v . The aim of the next section is to investigate this relation.

4.2 Generalized Substitutions

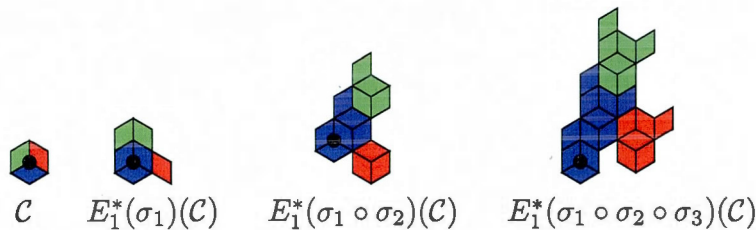
When σ is a unimodular substitution, it is possible to associate with it a notion of substitution acting on faces of cubes, following the formalism of [2]:

$$E_1^*(\sigma)(x, i^*) := \sum_{j \in \{1,2,3\}} \sum_{p,s \text{ such that } \sigma(j)=pis} (M_\sigma^{-1}(x + l(s)), j^*). \quad (4)$$

The action of $E_1^*(\sigma)$ extends in a natural way to unions of faces. A mapping of the form $E_1^*(\sigma)$ is called a *generalized substitution*. It is obtained as the dual map of some map $E_1(\sigma)$ that can be seen as a geometric realization of σ . In the notation $E_1^*(\sigma)$, the subscript of $E_1^*(\sigma)$ stands for the codimension of the faces, while the superscript of $E_1^*(\sigma)$ refers to duality. Note that the incidence matrix of $E_1^*(\sigma)$ is the transpose of the incidence matrix of σ .

Example 4. Let $\sigma_1 : 2 \mapsto 23, 3 \mapsto 3$, $\sigma_2 : 2 \mapsto 123, 3 \mapsto 13$, $\sigma_3 : 2 \mapsto 123, 3 \mapsto 3$ be the substitutions obtained from the reduction of the vector $(2, 2, 3)$ by using Poincaré algorithm.

If $\mathcal{C} = \text{cube}$ is the lower unit cube, then one gets



One key property of generalized substitutions is that they preserve discrete planes, as proved in [2]. Indeed, one has the following result for any unimodular substitution σ and any vector \mathbf{n} with nonnegative entries:

$$E_1^*(\sigma)(\mathcal{P}_{\mathbf{n}}) = \mathcal{P}_{t_{M_{\sigma}} \mathbf{n}}. \quad (5)$$

4.3 Dual Pattern

We can now apply the notions previously introduced in order to define a pattern of the discrete plane $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ (see (1)) that can be associated with the coding word \mathbf{w} .

Definition 4 (Dual pattern). For $i = \{1, 2, 3\}$, let

$$\mathcal{W}_i := E_1^*(\sigma_N) \circ \dots \circ E_1^*(\sigma_1)(\mathbf{0}, i^*)$$

and

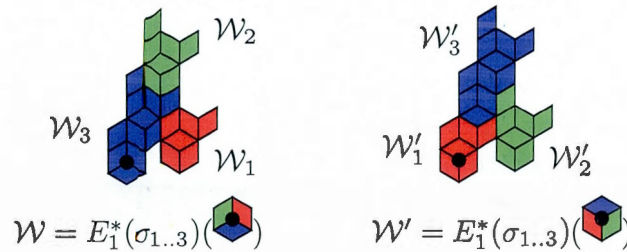
$$\mathcal{W}'_i := E_1^*(\sigma_N) \circ \dots \circ E_1^*(\sigma_1)(\mathbf{e}_i, i^*).$$

One sets furthermore $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3$ and $\mathcal{W}' = \mathcal{W}'_1 \cup \mathcal{W}'_2 \cup \mathcal{W}'_3$.

According to [2], the three patterns \mathcal{W}_i (resp. \mathcal{W}'_i) for $i \in \{1, 2, 3\}$ have disjoint interiors. Furthermore \mathcal{W} and \mathcal{W}' coincide except on faces of the lower and upper unit cubes, \mathcal{W} contains the lower unit cube, and \mathcal{W}' the upper one.

Remark 3. The pattern \mathcal{W} is obtained by taking the image of the lower unit cube under the action of $E_1^*(\sigma)$. Note that \mathbf{w} and \mathcal{W} do not have the same number of elements. Indeed the number of elements of the coding word \mathbf{w} is equal to the sum of entries of the column with index \mathbf{w}_N of $M_{1..N}$, whereas the number of elements of the pattern \mathcal{W}_i is equal to the sum of entries of the line with index i of $M_{1..N}$, by (4). Nevertheless, the number of faces in \mathcal{W} is equal to $\sum_{i=1}^3 |\sigma_{1..N}(i)|$.

Example 5. Let $\mathbf{u} = (2, 2, 3)$. By using Poincaré algorithm, both \mathcal{W} and \mathcal{W}' have 24 faces:



The following theorem summarizes the main properties of the dual pattern. This theorem is an adaptation to the present context of results of [2].

Theorem 1. The following properties hold:

1. $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{v}}$;
2. the pattern \mathcal{W} is a periodic pattern for $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ with period vectors being

$$(M_{1..N})^{-1}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), (M_{1..N})^{-1}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3);$$

3. for all $i \in \{1, 2, 3\}$, one has

$$\mathcal{W} + (M_{1..N})^{-1}e_i \subset \mathcal{W}'.$$

Proof. 1. We first note that the faces $(0, i^*) \subset \mathcal{P}_1$ by (3) for $i = 1, 2, 3$. We deduce the first assertion from $v = {}^t M_{1..N} \mathbf{1}$ and from (5).

2. One has for $i \neq j$ $\langle (M_{1..N})^{-1}(e_i - e_j), v \rangle = \langle e_i - e_j, \mathbf{1} \rangle = 0$. Hence for every $m, n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{W} + m(M_{1..N})^{-1}(e_1 - e_2) + n(M_{1..N})^{-1}(e_1 - e_3) \subset \mathcal{P}_v$.

3. Let $(x, k^*) \subset \mathcal{W}_i$. By definition, the face (x, k^*) occurs in the image by $E_1^*(\sigma_{1..N})$ of the face $(0, i^*)$. Hence, there exists s such that $\sigma_{1..N}(k) = pis$. One has $x = (M_{1..N})^{-1}l(s)$.

We assume that p is not equal to the empty word. Let j stand for its last letter. The face $(x + (M_{1..N})^{-1}e_i, k^*)$ occurs in the image of the face $(0, j^*)$ by $E_1^*(\sigma_{1..N})$, by considering as suffix is . Hence it occurs in \mathcal{W} and thus also in \mathcal{W}' since both sets coincide except on the lower and upper unit cubes.

Assume now that p is equal to the empty word. One has

$$\begin{aligned} x &= (M_{1..N})^{-1}(l(\sigma(k)) - e_i) = (M_{1..N})^{-1}(M_{1..N}e_k - e_i) \\ &= e_k - (M_{1..N})^{-1}e_i. \end{aligned}$$

Hence the face $(x + (M_{1..N})^{-1}e_i, k^*) = (e_k, k^*)$ occurs in \mathcal{W}' .

4.4 Exchange of Pieces

According to [2], Theorem 1 allows one to define a mapping from \mathcal{W} onto \mathcal{W}' defined as an exchange of pieces between both sets.

Definition 5. We define the mapping

$$\mathcal{E}: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}', (x, k^*) \mapsto (x + (M_{1..N})^{-1}e_i, k^*) \text{ if } (x, k^*) \in \mathcal{W}_i.$$

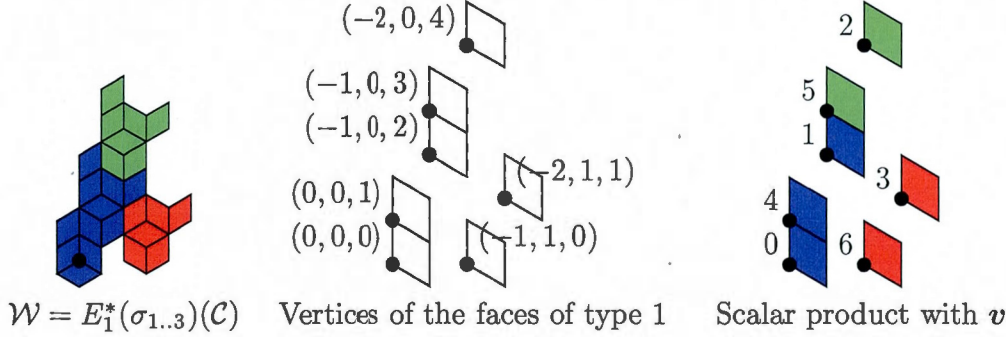
This definition is illustrated in Example 5. We have seen in the proof of the third assertion of Theorem 1 that $\mathcal{E}^k(0, i^*) \in \mathcal{W}$ for $0 \leq k < |\sigma_{1..N}(i)|$ and that $\mathcal{E}^k(0, i^*) = (e_i, i^*)$ for $k = |\sigma_{1..N}(i)|$. We define the coding of the orbit of $(0, i^*)$ under the action of \mathcal{E} as the word of length $|\sigma_{1..N}(i)|$ defined over the alphabet $\{1, 2, 3\}^*$ as follows: for $1 \leq k \leq |\sigma_{1..N}(i)|$, its k th letter is equal to the index j of the subpattern \mathcal{W}_j to which $\mathcal{E}^{k-1}(0, i^*)$ belongs. This word is well defined according to Assertion 3 of Theorem 1.

Theorem 2. The coding word $\mathbf{w} = \sigma_{1..N}(\mathbf{w}_N)$ is the reversal of the coding of the orbit of the face $(0, \mathbf{w}_N^*)$ under the action of \mathcal{E} . The vertices of the discrete segment with coding word \mathbf{w} are in a one-to-one correspondence with the faces of type \mathbf{w}_N of \mathcal{W} .

Proof. We write $\mathbf{w} = z_1 \cdots z_k \cdots z_{|\mathbf{w}|}$. We consider the orbit of $(0, \mathbf{w}_N^*)$ under the action of the exchange of pieces \mathcal{E} . The proof is done by induction on k . The property holds for $k = 1$: $(0, \mathbf{w}_N^*)$ belongs to $E_1^*(\sigma_{1..N})(0, z_{|\mathbf{w}|}^*)$. We assume that the induction hypothesis holds for all $\ell \leq k$ with $1 \leq k < |\mathbf{w}|$.

Hence $\mathcal{E}^{k-1}(0, i^*) = ((M_{1..N})^{-1}l(z_{|w|-k+1} \cdots z_{|w|}), w_N^*)$ and $\mathcal{E}^{k-1}(0, w_N^*)$ is contained in $\mathcal{W}_{z_{|w|-k}}$. Consequently, $\mathcal{E}^k(0, w_N^*) = \mathcal{E}^{k-1}(0, w_N^*) + M_{1..N}^{-1}e_{z_{|w|-k}}$ and $\mathcal{E}^{k-1}(0, i^*) = (M_{1..N}^{-1}l(z_1 \cdots z_{|w|-k}), w_N^*)$. The one-to-one mapping comes from $\langle -M_{1..N}^{-1}l(z_1 \cdots z_k) + u_N, v \rangle = \langle -l(z_1 \cdots z_k) + l(w), 1 \rangle$.

Example 6. Let $u = (2, 2, 3)$ on which Poincaré algorithm is applied, and let $C = \text{cube}$ be the lower unit cube. One has $v = (7, 13, 4)$.



The letters of $w = 1231233$ correspond to the color of the faces of type 1 of W ordered decreasingly by their scalar product with v . The vertices of the discrete segment depicted in Example 3:

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3)$$

are in one-to-one correspondence with the vertices of the faces of type 1 by the map

$$x \mapsto -(M_{1..3})^{-1} \cdot x + u_N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remark 4. Theorem 2 does not only apply for w_N but also for the other letters. Note that it allows a labelling of faces of a given type by increasing distance to the Euclidean plane with normal vector v . Theorem 2 can be considered as an analogue of the description of Sturmian and Christoffel words in terms of codings of rotations acting on the unit circle. It also provides a second simple generation method for discrete segments.

5 Conclusion

We have described here a generation method for discrete segments connecting the origin to a given point $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{N}^3$. We obtain two generation methods: the first one is stated in terms of an iteration of a finite number of substitutions governed by the choice of the underlying three-dimensional Euclid's algorithm (see Section 3); the second one is of a more geometric flavor and involves a dual discrete plane (see Section 4.4). We recover here duality ideas that can be found in [7] in the framework of Christoffel words. Our contribution mostly relies in the

application and development of the formalism of [2] in the context of the study of discrete lines. Note that the use of generalized substitutions (see Section 2.2) associated with multi-dimensional continued fraction algorithms has also already proved its efficiency in discrete geometry for the generation of discrete planes, see [11,6]. We now aim at starting a thorough investigation and comparison of the generation properties of the most classical three-dimensional Euclid's algorithm.

References

1. Andres, E.: Discrete linear objects in dimension n : the standard model. *Graphical Models* 65, 92–111 (2003)
2. Arnoux, P., Ito, S.: Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 8(2), 181–207 (2001)
3. Arnoux, P., Mauduit, C., Shiokawa, I., Tamura, J.I.: Complexity of sequences defined by billiards in the cube. *Bull. Soc. Math. France* 122, 1–12 (1994)
4. Arnoux, P., Rauzy, G.: Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$. *Bull. Soc. Math. France* 119, 199–215 (1991)
5. Berthé, V., Ferenczi, S., Zamboni, L.Q.: Interactions between dynamics, arithmetics and combinatorics: the good, the bad, and the ugly. In: *Algebraic and Topological Dynamics, Contemp. Math.*, vol. 385, pp. 333–364. Amer. Math. Soc., Providence (2005)
6. Berthé, V., Lacasse, A., Paquin, G., Provençal, X.: A study of Jacobi-Perron boundary words for the generation of discrete planes. Preprint (2010)
7. Berthé, V., de Luca, A., Reutenauer, C.: On an involution of Christoffel words and Sturmian morphisms. *European Journal of Combinatorics* 29, 535–553 (2008)
8. Brimkov, V.E., Barneva, R.P., Brimkov, B., de Vieilleville, F.: Offset approach to defining 3D digital lines. In: *Advances in Visual Computing*, pp. 678–687 (2008)
9. Brimkov, V.E., Barneva, R.P., Brimkov, B.: Minimal offsets that guarantee maximal or minimal connectivity of digital curves in nD . In: Brlek, S., Reutenauer, C., Provençal, X. (eds.) *DGCI 2009. LNCS*, vol. 5810, pp. 337–349. Springer, Heidelberg (2009)
10. Broise-Alamichel, A., Guivarc'h, Y.: Exposants caractéristiques de l'algorithme de Jacobi-Perron et de la transformation associée. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 51(3), 565–686 (2001)
11. Fernique, T.: Generation and recognition of digital planes using multi-dimensional continued fractions. In: Coeurjolly, D., Sivignon, I., Tougne, L., Dupont, F. (eds.) *DGCI 2008. LNCS*, vol. 4992, pp. 33–44. Springer, Heidelberg (2008)
12. Figueiredo, O., Reveillès, J.P.: New results about 3d digital lines. In: *Proc. Internat. Conference Vision Geometry V*, *Proc. SPIE*, vol. 2826, pp. 98–108 (1996)
13. Hubert, P.: Suites équilibrées. *Theoret. Comput. Sci.* 242, 91–108 (2000)
14. Klette, R., Rosenfeld, A.: Digital straightness—a review. *Discrete Applied Mathematics* 139, 197–230 (2004)
15. Lothaire, M.: *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge (2002)
16. Reveillès, J.P.: *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg (1991)
17. Schweiger, F.: *Multidimensional Continued Fraction*. Oxford Univ. Press, New York (2000)
18. Toutant, J.L.: Characterization of the closest discrete approximation of a line in the 3-Dimensional space. In: *Advances in Visual Computing*, pp. 618–627 (2006)

4.12 *Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies*

Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies

Valérie Berthé

Laboratoire d'Informatique Algorithmique : Fondements et Applications
Université Paris Diderot
Paris 7 - Case 7014
F-75205 Paris Cedex 13, France
berthe@liafa.jussieu.fr

Sébastien Labbé

Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique,
Université du Québec à Montréal,
C.P. 8888 Succursale "Centre-Ville", Montréal (QC), Canada H3C 3P8
labbe.sebastien@courrier.uqam.ca

We consider the following problem. Let us fix a finite alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$; for any d -uple of letter frequencies $(f_1, \dots, f_d) \in [0, 1]^d$ with $\sum_{i=1}^d f_i = 1$, how to construct an infinite word u over the alphabet \mathcal{A} satisfying the following conditions: u has linear complexity function, u is uniformly balanced, the letter frequencies in u are given by (f_1, \dots, f_d) . This paper investigates a construction method for such words based on the use of mixed multidimensional continued fraction algorithms.

Keywords: balanced words, discrepancy, letter frequency, multidimensional continued fractions, discrete geometry

1 Introduction

We consider the following problem: let us fix a finite alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$; for any d -uple of letter frequencies $(f_1, \dots, f_d) \in [0, 1]^d$ with $\sum_{i=1}^d f_i = 1$, how to construct an infinite word u over the alphabet \mathcal{A} satisfying the following conditions:

1. u has linear complexity function
2. u is uniformly balanced
3. the letter frequencies in u are given by (f_1, \dots, f_d) .

Let us first recall several definitions in order to clarify the previous statement. A word $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ is said to be *uniformly balanced* if there exists a constant $C > 0$ such that for any pair of factors of the same length v, w of u , and for any letter $i \in \mathcal{A}$,

$$||v|_i - |w|_i| \leq C,$$

where the notation $|x|_j$ stands for the number of occurrences of the letter j in the factor x . A word u has *linear complexity function* if there exists a constant $C' > 0$ such that the number of factors of u of length n is smaller than $C' \cdot n$, for every positive integer n . The *frequency* f_i of a letter $i \in \mathcal{A}$ in $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is defined as the limit (when n tends towards infinity), if it exists, of the number of occurrences of i in $u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ divided by n .

This problem has several motivations. The first one comes from discrete geometry: such an infinite word can be seen as a coding of a discrete line in \mathbb{Z}^d . Indeed one associates with any infinite word over the alphabet \mathcal{A} a broken line obtained as a stair made of a union of segments of unit length directed according to the coordinate axes, whose vertices are obtained by replacing each of the letters of u by one of the canonical basis vectors and by concatenating these vectors. Let $\mathbf{I}: A^* \rightarrow \mathbb{N}^n$, $w \mapsto {}^t(|w|_{a_1}, \dots, |w|_{a_n})$ stand for the *abelianisation map* or the *Parikh mapping*. More precisely, the set of vertices of this broken line is equal to $\{\mathbf{I}(u_0 \cdots u_{N-1}) \mid N \in \mathbb{N}\}$. The question is to know how well the line associated with the word u approximates the Euclidean line directed by the vector of letter frequencies of u , when they exist. There exist various strategies for defining and generating discrete lines in the three-dimensional space. With no claim for being exhaustive, let us quote e.g. [2, 9, 14, 23]. Nevertheless, they do not fulfill Condition 1. on the linear complexity. Note that the notion of discrete line defined in [2] corresponds to billiard words. Condition 1. means here that these discrete lines are “simple” in terms of number of local configurations.

The second motivation comes from symbolic dynamical systems and Diophantine approximation: is it possible to define a Rauzy fractal associated with any translation of the torus? More precisely, assume we are given a translation $x \mapsto x + (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ defined on $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$; the Rauzy fractal \mathcal{R} associated with an infinite word u over the d -letter alphabet \mathcal{A} is defined by projecting along the frequency vector of u on a transverse hyperplane the vertices of the broken line associated with u (such as described above) and then, by taking the closure. For more on Rauzy fractals, see e.g. [8]. The problem now becomes the following: is it possible to construct an infinite word u over the d -letter alphabet \mathcal{A} such that \mathcal{R} is a compact set that tiles periodically this transverse hyperplane and such that u has linear complexity? Let us explain in this context the requirement concerning linear complexity (Condition 1.): we would like to recover from the dynamical and combinatorial properties of the infinite word u arithmetical information on the parameters underlying the translation on the torus. This will be easier if u has low complexity function, i.e., a low numbers of factors. Let us quote as a further motivation uniform distribution and the so-called chairman assignment problem, see e.g. [22], and the references therein.

There exist families of words that satisfy Conditions 2. and 3. but not Condition 1. Billiard words are defined as codings of trajectories of billiards in a cube; they are shown to have quadratic complexity (see [4, 6]). They satisfy Conditions 2. and 3. Let us also quote the construction described in [12] which produces step by step a broken line whose vertices belong to \mathbb{Z}^3 that approximates a given direction by choosing at each step the closest point. It is proved in [12] that such a broken line can be obtained by selecting integer points by shifting a polygonal window along the line. The complexity is here again quadratic. The corresponding infinite words satisfy Conditions 2. and 3. Note that 1-balanced words over a higher-alphabet do not seem to be good candidates for describing discrete segments in the space: not all frequencies can be reached. Fraenkel’s conjecture states that the possible frequencies for 1-balanced words are rational and uniquely determined, when they are assumed to be distinct [16]. In particular, when $k = 3$, the only possible 1-balanced word is $(1213121)^\infty$ (if frequencies are distinct), up to a permutation of letters and up to shifts. For the irrational case, see [18] and [17]. For more references on the subject, see also the survey [24]. Note also that Arnoux-Rauzy words (see e.g. [5, 11, 10]) are infinite words that do not satisfy Condition 2., such as proved in [11], but that do satisfy Conditions 1. and 3. Furthermore, they are not defined for every d -uple of letter frequencies, but only for a set of zero measure in $[0, 1]^d$. For an illustration, see Figure 4.

2 Multidimensional continued fractions and frequencies

The strategy we consider here for constructing infinite words satisfying the three above mentioned conditions consists in applying a multidimensional continued fraction algorithm to the frequency vector (f_1, \dots, f_d) , according to [7]. We then associate with the steps of the algorithm substitutions, that is, rules that replace letters by words, with these substitutions having the matrices produced by the continued fraction algorithm as incidence matrices. More precisely, a *substitution* σ over the alphabet \mathcal{A} is an endomorphism of the free monoid \mathcal{A}^* , and the *incidence matrix* of the substitution σ is the square matrix M_σ with entries $m_{i,j} = |\sigma(j)|_i$ for all $i, j \in \mathcal{A}$.

Let us recall the most classical multidimensional continued fraction algorithms such as described e.g. in [20], and in [11, 10, 25] for Arnoux-Rauzy algorithm. For the sake of simplicity, we express them in dimension $d = 3$:

- Jacobi-Perron: let $0 \leq u_1, u_2 \leq u_3$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_2 - \lfloor \frac{u_2}{u_1} \rfloor u_1, u_3 - \lfloor \frac{u_3}{u_1} \rfloor u_1, u_1).$$

- Brun: we subtract the second largest entry from the largest one; for instance, if $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3 - u_2).$$

- Poincaré: we subtract the second largest entry to the largest one, and the smallest entry from the second largest one; for instance, if $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_2).$$

- Selmer: we subtract the smallest positive entry from the largest one; for instance, if $0 < u_1 \leq u_2 \leq u_3$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3 - u_1).$$

- Fully subtractive: we subtract the smallest positive entry from all the largest ones; for instance, if $0 < u_1 \leq u_2 \leq u_3$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_1).$$

- Arnoux-Rauzy: let $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$ with $u_3 \geq u_1 + u_2$,

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2, u_3 - u_1 - u_2).$$

otherwise the algorithm stops.

Let T be one of these algorithms applied to some vector $(f_1, f_2, f_3) \in [0, 1]^3$. With each matrix M produced by T , we associate a substitution whose incidence matrix is given by M . We thus obtain a word by iterating these substitutions in an S -adic way. We recall that a word is said to be S -adic if it is generated by composing a finite number of substitutions. This covers various families of words with a rich dynamical behavior such as Sturmian sequences; for more on S -adic words, see e.g. [3, 13].

3 Fusion algorithms

We can also mix these algorithms by performing at each step one among these rules, and this still yields S -adic generated words. We call such algorithms *fusion algorithms*. We focus on fusion algorithms obtained by applying Arnoux-Rauzy algorithm when possible, and otherwise, consistently one algorithm among Brun, Poincaré, Selmer, or the Fully Subtractive algorithms. Indeed, experimental studies indicate that a combination of Arnoux-Rauzy steps with Brun steps, or with Poincaré steps produces good performances (see Table 1 and Figure 5 below), and even better performances than when performing only one algorithm. Furthermore, this allows us to exploit and extend the good mean behaviour of Arnoux-Rauzy algorithm to a larger set of parameters (compare Figure 4 and Figure 5).

The aim of this lecture is to study the properties of such fusion algorithms for both finite (rational frequencies) and infinite expansions (irrational frequencies). In particular, we will focus on the almost everywhere convergence properties and ergodic properties of these fusion algorithms when the frequency vector has irrational coordinates. The proof relies on classic techniques such as described e.g. in [20].

	Minimum	Mean	Maximum	Std
Arnoux-Rauzy	0.6000	0.9055	1.200	0.1006
Fully subtractive	0.6000	5.982	13.92	4.388
Fully subtractive as possible	0.6000	4.172	25.00	4.440
Selmer	0.5000	2.184	12.75	2.070
Brun	0.5000	1.114	2.000	0.2664
Brun Multiplicative	0.6000	1.117	2.000	0.2681
Poincaré	0.6000	2.527	11.13	2.261
Jacobi-Perron	0.6000	2.731	25.00	3.456
Random reduction	0.5000	2.426	24.99	2.779
Fusion of Arnoux-Rauzy and Fully subtractive	0.6000	1.095	2.800	0.3105
Fusion of Arnoux-Rauzy and Selmer	0.6000	0.9678	1.450	0.1438
Fusion of Arnoux-Rauzy and Brun Multiplicative	0.6000	0.9132	1.400	0.1143
Fusion of Arnoux-Rauzy and Poincaré	0.6000	0.8941	1.200	0.09733

Table 1: Statistics (minimum, mean, maximum, standard deviation) for the discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ with $N = 100$.

Consider now the case of rational frequencies. Table 1 displays some experimental results. We work here in dimension $d = 3$ with rational frequency vectors of the form $\mathbf{f} = (a_1/N, a_2/N, a_3/N)$, with $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$, and with $a_1 + a_2 + a_3 = N$ being a positive integer. We apply a fusion algorithm to such a triplet, until we reach a vector whose entries are all equal to 0 but one. This produces a finite sequence of matrices, and thus, of substitutions, having these matrices as incidence matrices. Note that we have several choices for these substitutions, even if the incidence matrices have entries in $\{0, 1\}$. Given a matrix M , we thus have to decide in which order letters will be chosen in the image of a letter by a substitution σ having M as incidence matrix. We choose as a convention to put the most frequent letter first. (This (partly) explains why the triangles obtained in Figure 1, 2, 3, 4, 5 are not perfectly symmetric.) Let us apply now to \mathbf{f} a finite sequence of steps of a fusion algorithm together with a choice of substitutions associated with the produced matrices. One has $\mathbf{f} = M_1 \cdots M_n \mathbf{f}_n$, where the vector \mathbf{f}_n has two coordinates equal to 0, and one non-zero coordinate of index, say $w_n \in \{1, 2, 3\}$. The associated substitutions are denoted by σ_k , for $1 \leq k \leq n$. The following diagram illustrates how we produce finite

words w with frequency vector \mathbf{f} :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 & \xleftarrow{M_1} & \mathbf{f}_1 & \xleftarrow{M_2} & \mathbf{f}_2 & \xleftarrow{M_3} & \dots & \xleftarrow{M_n} & \mathbf{f}_n \\ w = w_0 & \xleftarrow{\sigma_1} & w_1 & \xleftarrow{\sigma_2} & w_2 & \xleftarrow{\sigma_3} & \dots & \xleftarrow{\sigma_n} & w_n \in \{1, 2, 3\} \end{array}$$

The experimental results of Table 1 indicate that the fusion algorithm obtained when applying Arnoux-Rauzy algorithm when possible, and otherwise, Poincaré algorithm, behaves in an efficient way with respect to the discrepancy. The *discrepancy* of a finite word $u_0 \dots u_n \in \mathcal{A}^{n+1}$ is defined as

$$\max_{i \in \mathcal{A}, 0 \leq k \leq n} |f_i \cdot k - |u_0 \dots u_k|_i|.$$

This distance is considered e.g. in [22] and [1], and is intimately connected with the following balance measure. The *balance* of $u_0 \dots u_n \in \mathcal{A}^{n+1}$ is defined as

$$\max_{i \in \mathcal{A}, |v|=|w|} ||v|_i - |w|_i|,$$

(here v, w are factors of u of the same length $|v| = |w|$). We have chosen here to use the discrepancy for our numerical experiments in order to compare our results with the bound discussed in [22]. Indeed, in [22], an algorithm is given that produces, for any given frequency vector (f_1, \dots, f_d) , an infinite word whose discrepancy is smaller than or equal to $1 - 1/(2d - 2)$ (this yields $3/4$ for $d = 3$). However, the lowest possible asymptotic order for the factor complexity of such a word does not seem to be known; nothing seems a priori to prevent it from being linear. In the fusion algorithm obtained by combining Arnoux-Rauzy algorithm with Poincaré algorithm, one obtains a mean discrepancy equal to 0.8910 when $N = 100$. More generally, Figure 1, 2, 3, 4, 5 below illustrate the behaviour of the discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ for a given N .

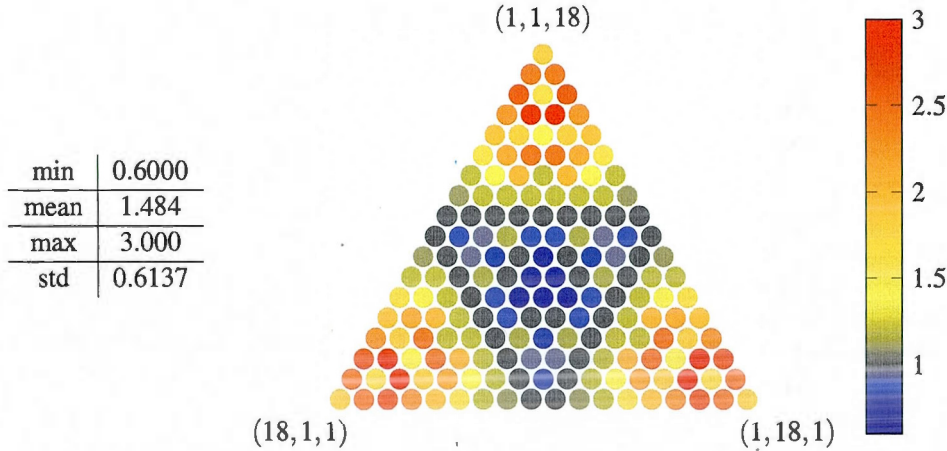


Figure 1: Discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ with $N = 20$ using Poincaré algorithm.

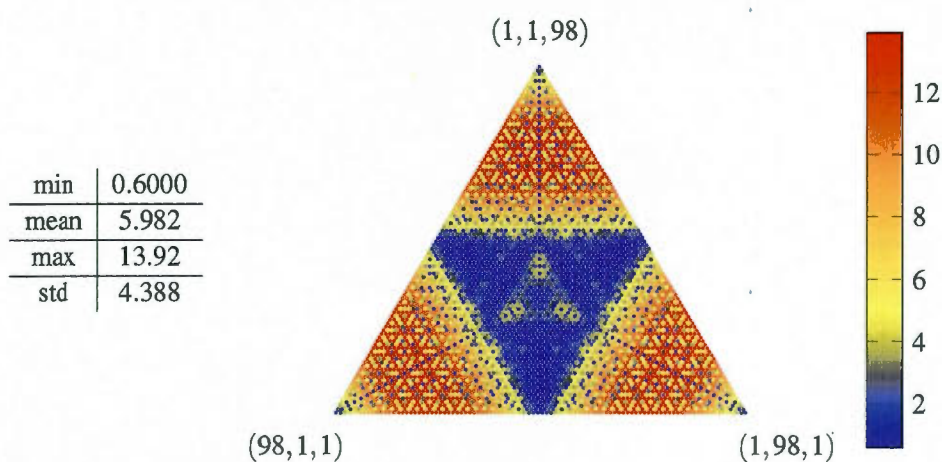


Figure 2: Discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ with $N = 100$ using Fully subtractive algorithm.

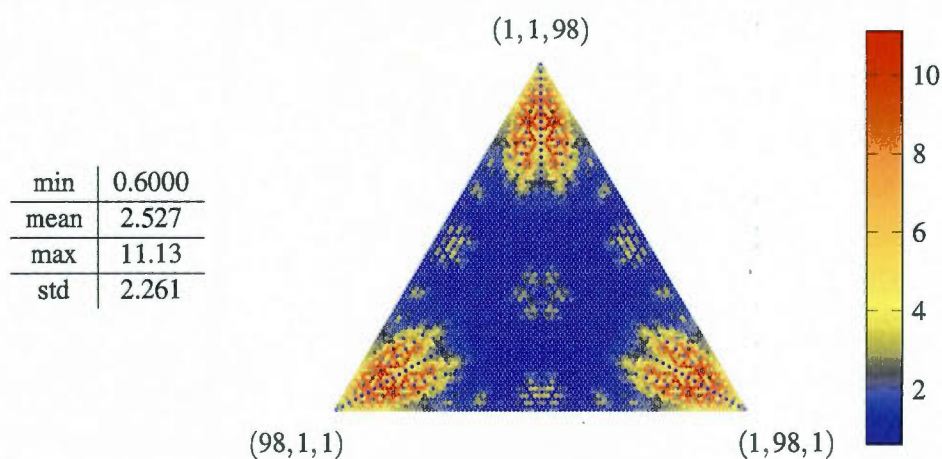


Figure 3: Discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ with $N = 100$ using Poincaré algorithm.

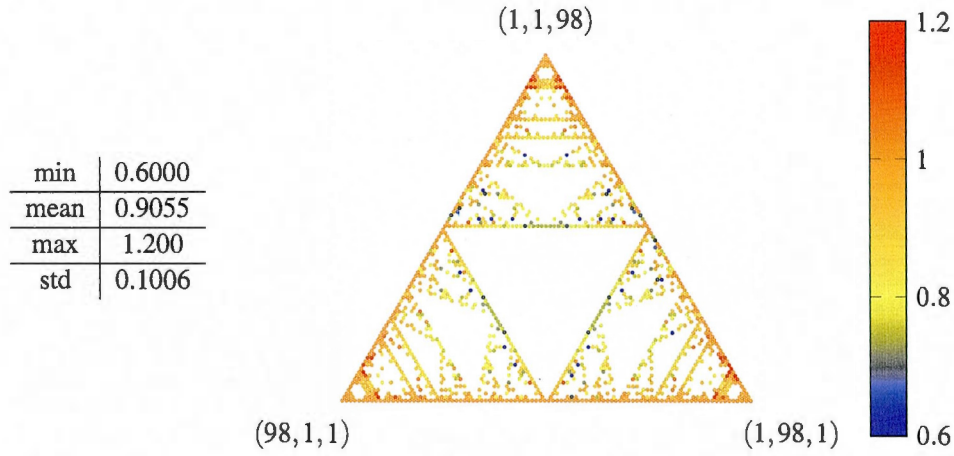


Figure 4: Discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ with $N = 100$ using Arnoux-Rauzy algorithm. This algorithm is defined only for vectors whose largest entry is greater than or equal to the sum of the other two.

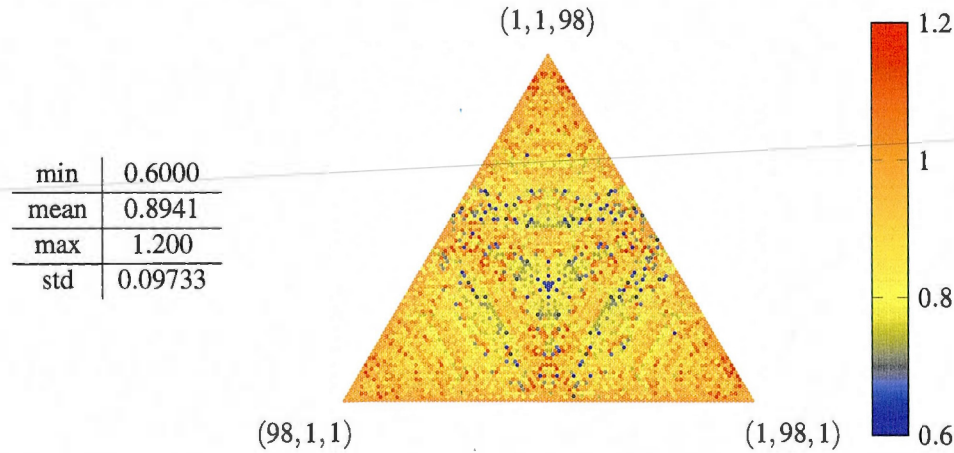


Figure 5: Discrepancy for triplets of nonnegative rational vectors $(a_1/N, a_2/N, a_3/N)$ such that $a_1 + a_2 + a_3 = N$ with $N = 100$ using a fusion of Arnoux-Rauzy and Poincaré algorithms.

Acknowledgements

We would like to thank warmly J. Shallit for pointing out reference [22], as well as R. Tijdeman for useful comments. This research was driven by computer exploration using the open-source mathematical software *Sage* [21] and its library on Combinatorics on words developed by the *Sage-Combinat* community, and in particular by the active developers: A. Blondin Massé, V. Delecroix, S. Labbé, T. Monteil and F. Saliola.

References

- [1] B. Adamczewski (2003): *Balances for fixed points of primitive substitutions*. *Theoret. Comput. Sci.* 307(1), pp. 47–75. Available at [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975\(03\)00092-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975(03)00092-6). Words.
- [2] E. Andres (2003): *Discrete linear objects in dimension n: the standard model*. *Graphical Models* 65, pp. 92–111.
- [3] P. Arnoux & V. Berthé (2002): *Some open problems*. In: *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, *Lecture Notes in Math.* 1794, Springer, Berlin, pp. 363–374.
- [4] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa & J. i. Tamura (1994): *Complexity of sequences defined by billiard in the cube*. *Bull. Soc. Math. France* 122(1), pp. 1–12. Available at http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_1_1_0.
- [5] P. Arnoux & G. Rauzy (1991): *Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$* . *Bull. Soc. Math. France* 119(2), pp. 199–215.
- [6] Yu. Baryshnikov (1995): *Complexity of trajectories in rectangular billiards*. *Comm. Math. Phys.* 174(1), pp. 43–56. Available at <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.cmp/1104275093>.
- [7] V. Berthé & S. Labbé (2011): *An Arithmetic and Combinatorial Approach to Three-Dimensional Discrete Lines*. In I. Debled-Rennesson, E. Domenjoud, B. Kerautret & P. Even, editors: *DGCI, Lecture Notes in Computer Science* 6607, Springer, pp. 47–58. Available at http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-19867-0_4.
- [8] V. Berthé & A. Siegel (2005): *Tilings associated with beta-numeration and substitutions*. *Integers* 5(3), pp. A2, 46.
- [9] V. E. Brimkov, R. P. Bameva & B. Brimkov (2009): *Minimal Offsets That Guarantee Maximal or Minimal Connectivity of Digital Curves in nD*. In S. Brlek, C. Reutenauer & X. Provençal, editors: *DGCI, Lecture Notes in Computer Science* 5810, Springer, pp. 337–349. Available at http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04397-0_29.
- [10] J. Cassaigne, S. Ferenczi & A. Messaoudi (2008): *Weak mixing and eigenvalues for Arnoux-Rauzy sequences*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 58(6), pp. 1983–2005. Available at http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_6_1983_0.
- [11] J. Cassaigne, S. Ferenczi & L. Q. Zamboni (2000): *Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 50(4), pp. 1265–1276. Available at http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_4_1265_0.
- [12] N. Chevallier (2009): *Coding of a translation of the two-dimensional torus*. *Monatsh. Math.* 157(2), pp. 101–130. Available at <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-008-0074-y>.
- [13] F. Durand (2003): *Corrigendum and addendum to: "Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors"* [*Ergodic Theory Dynam. Systems* 20 (2000) 1061–1078]. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 23(2), pp. 663–669. Available at <http://dx.doi.org/10.1017/S0143385702001293>.
- [14] O. Figueiredo & J.-P. Reveillès (1996): *New results about 3D digital lines*. In: *Proc. Internat. Conference Vision Geometry V, Proc. SPIE*, 2826, pp. 98–108.
- [15] R. Fischer & F. Schweiger (1975): *The number of steps in a finite Jacobi algorithm*. *Manuscripta Math.* 17(3), pp. 291–308.
- [16] A. S. Fraenkel (1973): *Complementing and exactly covering sequences*. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 14, pp. 8–20.
- [17] R. L. Graham (1973): *Covering the positive integers by disjoint sets of the form $\{[n\alpha + \beta] : n = 1, 2, \dots\}$* . *J. Combinatorial Theory Ser. A* 15, pp. 354–358.
- [18] P. Hubert (2000): *Suites équilibrées*. *Theoret. Comput. Sci.* 242(1-2), pp. 91–108. Available at [http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975\(98\)00202-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00202-3).

- [19] R. Morikawa (1982/83): *On eventually covering families generated by the bracket function*. *Bull. Fac. Liberal Arts Nagasaki Univ.* 23(1), pp. 17–22.
- [20] F. Schweiger (2000): *Multidimensional Continued Fraction*. Oxford Univ. Press, New York.
- [21] W.A. Stein et al. (2011): *Sage Mathematics Software (Version 4.7)*. The Sage Development Team. <http://www.sagemath.org>.
- [22] R. Tijdeman (1980): *The chairman assignment problem*. *Discrete Math.* 32(3), pp. 323–330. Available at [http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(80\)90269-1](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(80)90269-1).
- [23] J.-L. Toutant (2006): *Characterization of the Closest Discrete Approximation of a Line in the 3-Dimensional Space*. In: *ISVC (1), Lecture Notes in Computer Science 4291*, Springer, pp. 618–627. Available at http://dx.doi.org/10.1007/11919476_62.
- [24] L. Vuillon (2003): *Balanced words*. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 10(suppl.), pp. 787–805. Available at <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.bbms/1074791332>.
- [25] N. Wozny & L. Q. Zamboni (2001): *Frequencies of factors in Arnoux-Rauzy sequences*. *Acta Arith.* 96(3), pp. 261–278. Available at <http://dx.doi.org/10.4064/aa96-3-6>.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons développé l'idée que la combinatoire des mots est un outil adéquat pour représenter les objets de la géométrie discrète et résoudre des problèmes actuels de ce domaine. Nous avons considéré trois aspects (les pavages par un polyomino, la complexité palindromique et les droites discrètes 3D).

Par exemple, nous avons démontré la non existence de tuile admettant plus de deux pavages carrés à partir d'une équation sur les mots. En considérant le problème dans un contexte plus général, nous avons vu dans l'article *A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways* à la section 2.1 qu'il existe des solutions à une telle équation, mais elles ne peuvent décrire le mot de contour d'un polyomino, car un tel contour aurait autant de virages à droites que de virage à gauche ce qui est impossible sans croisement.

De plus, dans l'article *Combinatorial properties of double square tiles* à la section 2.5, nous avons montré que les tuiles doubles carrées sont invariantes par rotation de 180 degrés en démontrant que leur mot de contour se factorise en produit de palindromes. Cela illustre que la combinatoire des mots offre plus qu'une simple représentation, elle permet aussi d'extraire certaines données topologiques des objets qu'elle décrit.

Aussi, en faisant l'étude des questions issues des pavages par polyominos 4-connexes, nous avons compris que les solutions que nous obtenions grâce à la combinatoire des mots étaient aussi valides dans un cadre plus général, c'est-à-dire dans celui des polyominos 8-connexes.

Nous avons aussi considéré les droites discrètes sous l'angle des systèmes dynamiques symboliques. D'abord, en dimension deux où nous avons étudié la complexité palindromique des codages de rotations sur deux intervalles. Nous avons montré qu'ils sont

pleins, c'est-à-dire atteignent la complexité palindromique maximale tout comme les mots sturmiens qui codent les droites discrètes 2D.

Finalement, nous avons proposé une méthode de génération des droites discrètes 3D qui s'inspirent de la construction du mot de Tribonacci dont la projection est la fractale de Rauzy et dont la complexité en facteurs est linéaire. Nous croyons que cette approche est prometteuse et plus appropriée que les modèles de droites 3D 6-connexes proposés en géométrie discrète (Reveillès, 1991; Debled-Rennesson, 1995; Figueiredo et Reveillès, 1996; Feschet et Reveillès, 2006; Andres, 2003; Brimkov et al., 2008) qui se définissent à partir de prismes dont la projection est polygonale. Or, la complexité en facteurs des codages de translation sur un hexagone (tore) est quadratique. La construction de mots sur 3 lettres dont la complexité est linéaire est plus appropriée et proche des codages de droites discrètes 2D.

Quelques questions

Les travaux de cette thèse de doctorat mènent à plusieurs problèmes ouverts et questions non résolues. Concernant les problèmes de pavages par polyominos, nous désirons mieux comprendre les limites des résultats et voir jusqu'où ils peuvent être généralisés.

Question 4. *Peut-on adapter tous les résultats aux polyominos 8-connexes ?*

Question 5. *Peut-on considérer les questions équivalentes sur le réseau hexagonal ?*

Question 6. *Est-ce qu'une tuile peut être à la fois une tuile double carrée et une tuile hexagonale ?*

Question 7. *Existe-t-il une borne sur le nombre de pavages périodiques d'un polyomino en permettant les rotations et les réflexions ?*

Question 8. *Peut-on démontrer des résultats similaires pour les tuiles dont le contour est une courbe continue ?*

Question 9. *Peut-on borner le nombre de pavages périodiques d'un certain type admis par un polyomino 3D en se basant sur les travaux récents de (Gambini et Vuillon,*

2011) qui ont montré que le nombre de tuiles adjacentes est non borné pour les pavages périodiques en dimensions trois ?

Question 10. *Existe-t-il une fractale de Fibonacci en trois dimensions ? Peut-elle engendrer un pavage en dimensions trois ?*

Question 11. *Existe-t-il un algorithme pour énumérer les tuiles carrées indécomposables (premières).*

Question 12. *Peut-on trouver une preuve directe du Théorème 0.2 sur les palindromes.*

Question 13. *Peut-on trouver un contre-exemple ou une démonstration de la Conjecture 3.18 à propos du défaut fini non nul.*

Pour terminer, les méthodes substitutives que nous proposons pour générer les droites discrètes 3D suscitent aussi plusieurs questions dont les impacts vont au-delà de la géométrie discrète et concerne des domaines divers tels que les systèmes dynamiques, les algorithmes de fractions continues multidimensionnelles et l'approximation simultanée de nombres réels.

Les propriétés expérimentales de certains des algorithmes incitent à poursuivre les recherches sur le sujet. En particulier, nous nous intéressons à la complexité en facteurs des mots engendrés par l'algorithme de **Arnoux-Rauzy-Poincaré**.

Question 14. *Soit w un mot fini engendré par un nombre fini de substitutions en suivant l'algorithme d'Arnoux-Rauzy-Poincaré. Quelle est la complexité en facteur du mot w ? Est-elle toujours linéaire ?*

Nous savons qu'elle dépasse parfois $2n + 1$ comme l'illustre le calcul suivant où on passe de $p(2) = 5$ à $p(3) = 8$.

```
sage: w = Word('11111111111111321311132131132')
sage: s = WordMorphism('1->1,2->132,3->13')
sage: map(w.number_of_factors, range(20))
[1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 15, 14, 13, 12]
sage: map(s(w).number_of_factors, range(20))
[1, 3, 5, 8, 10, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 26, 25, 24, 23]
```

Question 15. Soit w un mot fini engendré un nombre fini de substitutions en suivant l'algorithme d'Arnoux-Rauzy-Poincaré. Peut-on borner la valeur d'équilibre du mot w ?

En général, la valeur d'équilibre peut faire un saut arbitrairement grand après l'application d'une seule substitution comme l'illustre l'exemple à la Figure 4.16.

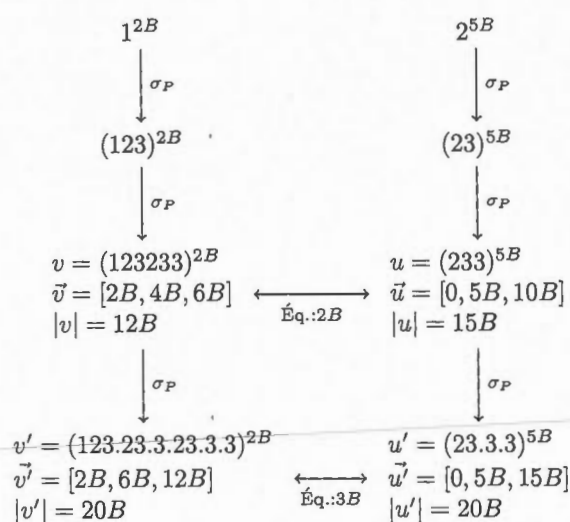


Figure 4.16 La valeur d'équilibre peut subir une augmentation arbitrairement grande par une application de la substitution de Poincaré. Sur l'image, la valeur d'équilibre passe de $2B$ à $3B$.

Question 16. En considérant l'algorithme d'Arnoux-Rauzy-Poincaré sur un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, peut-on démontrer que les vecteurs colonnes de la matrice produit $M_1 M_2 \cdots M_N$ tendent tous (en angle ou en distance) vers le vecteur \mathbf{u} ?

Question 17. Est-ce que l'algorithme renormalisé $\bar{T}_{ARP} : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$ est ergodique ?

Question 18. Calculer, si elle existe, la mesure invariante associée à l'algorithme renormalisé $\bar{T}_{ARP} : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$.

Dans (Nogueira, 1995), il a été démontré que \bar{T}_P est ergodique, mais sa mesure invariante n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Les Figures 4.17,

4.18 et 4.19 illustrent les triangles en bijection avec le triangle Δ_2 par l'application de $(\overline{T_P})^i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. L'aire de chaque triangle selon la mesure de Lebesgue est indiquée en son centre. On remarque que la mesure de Lebesgue n'est pas invariante sous la transformation $\overline{T_P}$ car

$$\frac{1}{165} + \frac{1}{120} + \frac{1}{560} + \frac{1}{364} + \frac{1}{455} + \frac{1}{220} = \frac{881}{34320} < \frac{1}{36}$$

Qu'en est-il de l'application $\overline{T_{ARP}} : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$? Ceci n'est qu'une question parmi plusieurs qui restent ouvertes.

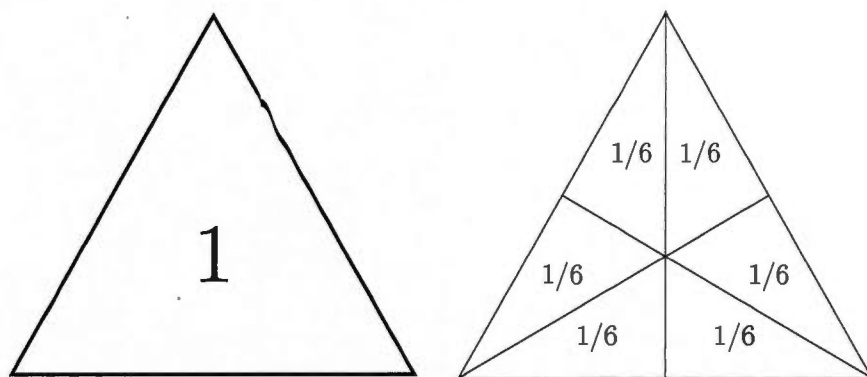


Figure 4.17 Préimages d'ordre 0 et d'ordre 1 de la fonction de Poincaré $\overline{T_P}$.

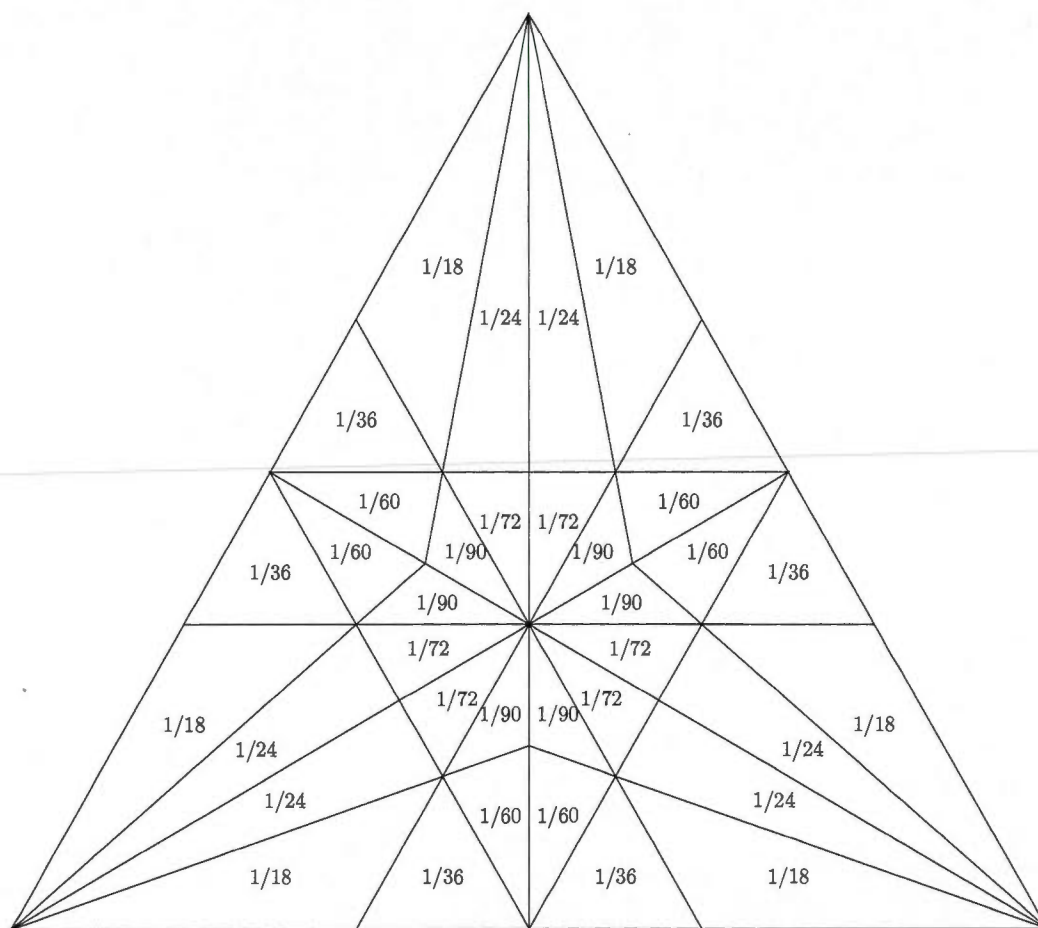


Figure 4.18 Préimages d'ordre 2 de la fonction de Poincaré \bar{T}_P .

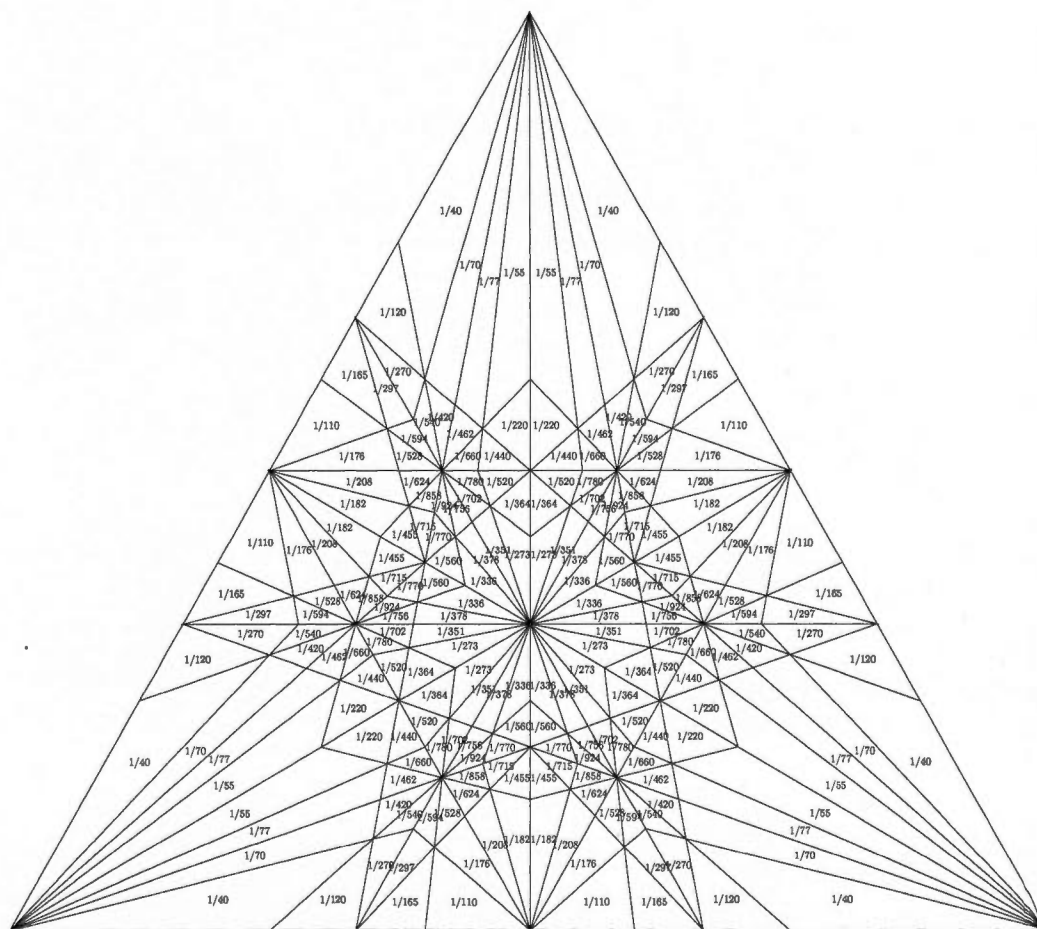


Figure 4.19 Préimages d'ordre 3 de la fonction de Poincaré \bar{T}_P .

BIBLIOGRAPHIE

- Adamczewski, B. 2003. « Balances for fixed points of primitive substitutions », *Theoretical Computer Science*, vol. 307, no. 1, p. 47–75.
- Allouche, J., M. Baake, J. Cassaigne, et D. Damanik. 2003. « Palindrome complexity », *Theoretical Computer Science*, vol. 292, no. 1, p. 9–31.
- Andres, E. 2003. « Discrete linear objects in dimension n : the standard model », *Graphical Models*, vol. 65, no. 1-3, p. 92–111.
- Anisiu, M., V. Anisiu, et Z. Kasa. 2006. « Properties of palindromes in finite words », *1002.2723*. Pure Math. Appl. 17, 3-4 (2006) pp. 183-195.
- Arnoux, P. et S. Ito. 2001. « Pisot substitutions and Rauzy fractals », *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, vol. 8, no. 2, p. 181–207.
- Arnoux, P., C. Mauduit, I. Shiokawa, et J. I. Tamura. 1994. « Complexity of sequences defined by billiards in the cube », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 122, p. 1–12.
- Arnoux, P. et G. Rauzy. 1991. « Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$ », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 119, no. 2, p. 199–215.
- Balková, L., E. Pelantová, et v. Starosta. 2011. « On Brlek-Reutenauer conjecture », *Theor. Comput. Sci.*, vol. 412, no. 41, p. 5649–5655.
- Balková, L., E. Pelantová, et Š. Starosta. 2011. « Infinite words with finite defect », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 47, no. 3, p. 562–574.
- Baryshnikov, Y. 1995. « Complexity of trajectories in rectangular billiards », *Commun. Math. Phys.*, vol. 174, p. 43–56.
- Beauquier, D. et M. Nivat. 1990. « Tiling the plane with one tile ». In *SCG '90 : Proc. 6th annual symposium on Computational geometry*, p. 128–138, Berkley, CA, USA. ACM Press.
- Beauquier, D. et M. Nivat. 1991a. « On translating one polyomino to tile the plane », *Discrete Comput. Geom.*, vol. 6, p. 575–592.
- Beauquier, D. et M. Nivat. 1991b. « On translating one polyomino to tile the plane », *Discrete & Computational Geometry*, vol. 6, no. 1, p. 575–592.
- Berger, R. 1966. « The undecidability of the domino problem », *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 66, p. 1–72.

- Berstel, J. 1990. « Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés ». In Lothaire, M., éditeur, *Mots, mélanges offerts à Schützenberger*, p. 298–309. Hermes Science Publications.
- Berstel, J., A. Lauve, C. Reutenauer, et F. Saliola. 2008. *Combinatorics on Words : Christoffel Words and Repetition in Words*. T. 27, série CRM monograph series. American Mathematical Society. 147 pages.
- Berstel, J. et D. Perrin. 2007. « The origins of combinatorics on words », *European Journal of Combinatorics*, vol. 28, no. 3, p. 996–1022.
- Berthé, V. et S. Labbé. 2011a. « An arithmetic and combinatorial approach to three-dimensional discrete lines ». In *Proc. DGCI 2011, 16th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 6607, série LNCS, p. 47–58, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.
- . 2011b. « Uniformly balanced words with linear complexity and prescribed letter frequencies ». In Ambrož, P., Š. Holub, et Z. Masáková, éditeurs, *Proc. 8th Int. Conf. on Words*, Prague, Czech Republic, September 12–16th, 2011. T. 63, série *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, p. 44–52. Open Publishing Association.
- Berthé, V. et L. Vuillon. 2001. « Palindromes and two-dimensional sturmian sequences », *J. Autom. Lang. Comb.*, vol. 6, no. 2, p. 121–138.
- Bhargava, M., K. Kedlaya, et L. Ng. 1999. Solutions to the 60th William Lowell Putnam mathematical competition. published electronically at <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnam/-pdf/1999s.pdf>.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, et S. Labbé. 2008. « Palindromic lacunas of the Thue-Morse word ». In *Proc. GASCom 2008*, p. 53–67, (16–20 June 2008, Bibbiena, Arezzo-Italia).
- . 2012. « A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 160, no. 7–8, p. 1011–1018.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, S. Labbé, et M. Mendès France. 2011a. « Fibonacci snowflakes », *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, vol. 35, p. 141–152.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, S. Labbé, et L. Vuillon. 2009. « Codings of rotations on two intervals are full ». In Nešetřil, J. et A. Raspaud, éditeurs, *EuroComb 2009, 7th International Conference on Words*. T. 34, p. 289–293.
- . 2011b. « Palindromic complexity of codings of rotations », *Theoretical Computer Science*, vol. 412, no. 46, p. 6455 – 6463.
- Blondin Massé, A., S. Brlek, A. Garon, et S. Labbé. 2008. « Combinatorial properties of f -palindromes in the Thue-Morse sequence », *Pure Mathematics and Applica-*

- tions, vol. 19, no. 2-3, p. 39–52.
- . 2009a. « Christoffel and Fibonacci tiles ». In Brlek, S., X. Provençal, et C. Reutenauer, éditeurs, *Proc. DGCI 2009, 15th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 5810, série LNCS, p. 67–78, Montréal, Canada. Springer-Verlag.
 - . 2009b. « Palindromes and local periodicity ». In *Words 2009, 7th Int. Conf. on Words*. Electronic proceedings.
 - . 2011a. « Equations on palindromes and circular words », *Theoretical Computer Science*, vol. 412, no. 27, p. 2922–2930.
 - . 2011b. « Every polyomino yields at most two square tilings ». In *Proc. 7th Int. Conf. on Lattice paths combinatorics and applications, July 4–7, 2011, Siena, Italy*, p. 57–61.
 - . 2011c. « Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways », *Theoretical Computer Science*, vol. 412, no. 36, p. 4778 – 4786.
- Blondin Massé, A., A. Garon, et S. Labbé. 2010. « Generation of double square tiles ». In *GASCom 2010*, Montreal, Canada. Electronic proceedings.
- . 2012. « Combinatorial properties of double square tiles », *Theoretical Computer Science*. à paraître.
- Brentjes, A. J. 1981. *Multidimensional continued fraction algorithms*. Amsterdam : Mathematisch Centrum.
- Brimkov, V., R. Barneva, B. Brimkov, et F. de Vieilleville. 2008. *Offset Approach to Defining 3D Digital Lines*. Coll. « Advances in Visual Computing », p. 678–687.
- Brimkov, V. E., E. Andres, et R. P. Barneva. 2000. « Object discretization in higher dimensions ». In Borgfors, G., I. Nyström, et G. S. Baja, éditeurs, *Proc. DGCI, 9th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, Uppsala, Sweden, December 13–15, 2000*. T. 1953, p. 210–221. Springer Berlin Heidelberg.
- Brlek, S., S. Hamel, M. Nivat, et C. Reutenauer. 2004. « On the palindromic complexity of infinite words », *Int. J. Found. Comput. Sci.*, vol. 15, no. 2, p. 293–306.
- Brlek, S., M. Koskas, et X. Provençal. 2011. « A linear time and space algorithm for detecting path intersection in \mathbb{Z}^d », *Theoretical Computer Science*, vol. 412, no. 36, p. 4841–4850.
- Brlek, S., G. Labelle, et A. Lacasse. 2005a. « Algorithms for polyominoes based on the discrete Green theorem », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 147, no. 2-3, p. 187–205.
- Brlek, S., G. Labelle, et A. Lacasse. 2005b. « A note on a result of Daurat and Nivat ».

- In de Felice, C. et A. Restivo, éditeurs, *Proc. DLT 2005, 9th Int. Conf. on Developments in Language Theory*. T. 3572, série LNCS, p. 189–198, Palermo, Italia. Springer-Verlag.
- . 2006. « Properties of the contour path of discrete sets », *Int. J. Found. Comput. Sci.*, vol. 17, no. 3, p. 543–556.
- Brlek, S., J. Lachaud, et X. Provençal. 2008. « Combinatorial view of digital convexity ». In *Proc. DGCI, 14th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, Lyon, France, April 16-18, 2008*. T. 4992, série LNCS, p. 57–68. Springer.
- Brlek, S., J. Lachaud, X. Provençal, et C. Reutenauer. 2009. « Lyndon + Christoffel = digitally convex », *Pattern Recognition*, vol. 42, no. 10, p. 2239–2246.
- Brlek, S. et X. Provençal. 2006. « An optimal algorithm for detecting pseudo-squares ». In Kuba, A., L. G. Nyúl, et K. Palágyi, éditeurs, *Proc. DGCI 2006, 13th IAPR Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, Szeged, Hungary, October 25-27, 2006*. T. 4245, série LNCS, p. 403–412. Springer.
- Brlek, S., X. Provençal, et J. Fédou. 2009. « On the tiling by translation problem », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, no. 3, p. 464–475.
- Brlek, S. et C. Reutenauer. 2011. « Complexity and palindromic defect of infinite words », *Theoretical Computer Science*, vol. 412, no. 4–5, p. 493–497.
- Bucci, M., A. De Luca, A. Glen, et L. Q. Zamboni. 2009a. « A connection between palindromic and factor complexity using return words », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 42, no. 1, p. 60–74.
- . 2009b. « A new characteristic property of rich words », *Theoretical Computer Science*, vol. 410, no. 30–32, p. 2860–2863.
- Burrows, M. et D. J. Wheeler. 1994. A block-sorting lossless data compression algorithm. Rapport.
- Cassaigne, J. 1995. « Special factors of sequences with linear subword complexity ». In Dassow, J., G. Rozenberg, et A. Salomaa, éditeurs, *Proc. DLT 1995, 2nd Int. Conf. on Developments in Language Theory, Magdeburg, Germany, July 17-21, 1995*, p. 25–34. World Scientific.
- Cassaigne, J. 2010. Communication personnelle.
- Cassaigne, J. et F. Nicolas. 2010. *Factor complexity*. Coll. « Combinatorics, automata and number theory ». T. 135, série *Encyclopedia Math. Appl.*, p. 163–247. Cambridge : Cambridge Univ. Press.
- Christ, T., D. Pálvölgyi, et M. Stojaković. 2010. « Consistent digital line segments ». In *Proc. SCG, 26th ACM Symposium on Computational Geometry, Snowbird, Utah, USA, June 13-16, 2010*, p. 11–18.

- Culik, K. et J. Kari. 1997. *On aperiodic sets of Wang tiles*. Coll. Freksa, C., M. Jantzen, et R. Valk, éditeurs, Coll. « *Foundations of Computer Science* ». T. 1337, série *Lecture Notes in Computer Science*, p. 153–162. Springer Berlin / Heidelberg. 10.1007/BFb0052084.
- Daurat, A. et M. Nivat. 2005. « Salient and reentrant points of discrete sets », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 151, no. 1-3, p. 106–121.
- de Luca, A. et F. Mignosi. 1994. « Some combinatorial properties of Sturmian words », *Theoretical Computer Science*, vol. 136, no. 2, p. 361–385.
- Debled-Rennesson, I. 1995. « Reconnaissance des droites et plans discrets ». Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur - Strasbourg.
- Debled-Rennesson, I., J.-L. Rémy, et J. Rouyer-Degli. 2003. « Detection of the discrete convexity of polyominoes », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 125, no. 1, p. 115 – 133.
- Droubay, X., J. Justin, et G. Pirillo. 2001. « Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy », *Theoretical Computer Science*, vol. 255, no. 1-2, p. 539–553.
- Droubay, X. et G. Pirillo. 1999. « Palindromes and sturmian words », *Theoretical Computer Science*, vol. 223, no. 1-2, p. 73–85.
- Ferenczi, S. et Z. Kása. 1999. « Complexity for finite factors of infinite sequences », *Theoretical Computer Science*, vol. 218, no. 1, p. 177 – 195.
- Feschet, F. et J. Reveillès. 2006. « A generic approach for n-Dimensional digital lines ». In Kuba, A., L. G. Nyúl, et K. Palágyi, éditeurs, *Proc. DGCI, 13th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery, Szeged, Hungary, October 25-27, 2006*. T. 4245, série LNCS, p. 29–40. Springer.
- Figueiredo, O. et J.-P. Reveillès. 1996. « New results about 3d digital lines ». In Melter, R. A., A. Y. Wu, et L. J. Latecki, éditeurs, *Proc. Int. Conf. on Vision Geometry V, Denver CO USA, August 6, 1996*. T. 2826, p. 98–108. SPIE Digital Library.
- Fogg, N. P. 2002. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*. T. 1794, série *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin : Springer-Verlag. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- Fraenkel, A. S., M. Mushkin, et U. Tassa. 1978. « Determination of $[n\theta]$ by its sequence of differences », *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 21, no. 4, p. 441–446.
- Freeman, H. 1961. « On the encoding of arbitrary geometric configurations », *IRE Trans. Electronic Computer*, vol. 10, p. 260–268.
- . 1970. « Boundary encoding and processing ». In Lipkin, B. et A. Rosenfeld, éditeurs, *Picture Processing and Psychopictorics*, p. 241–266. Academic Press,

New York.

- Gambini, I. et L. Vuillon. 2011. « How many faces can the polycubes of lattice tilings by translation of R^3 have? », *Electr. J. Comb.*, vol. 18, no. 1.
- Glen, A., J. Justin, S. Widmer, et L. Q. Zamboni. 2009. « Palindromic richness », *Eur. J. Comb.*, vol. 30, no. 2, p. 510–531.
- Golomb, S. W. 1970. « Tiling with sets of polyominoes », *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 9, no. 1, p. 60–71.
- Hof, A., O. Knill, et B. Simon. 1995. « Singular continuous spectrum for palindromic Schrodinger operators », *Commun. Math. Phys.*, vol. 174, p. 149–159.
- Kari, J. 1996. « A small aperiodic set of wang tiles », *Discrete Mathematics*, vol. 160, no. 1–3, p. 259 – 264.
- Keating, K. et A. Vince. 1999. « Isohedral polyomino tiling of the plane », *Discrete & Computational Geometry*, vol. 21, no. 4, p. 615–630.
- Knuth, D. E. 2000. « Dancing links », *cs/0011047*. Millenial Perspectives in Computer Science, 2000, 187–214.
- Labbé, S. 2008. « Propriétés combinatoires des f -palindromes ». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal. M10615.
- . 2011a. Résoudre le puzzle quantumino avec le logiciel sage. <http://www.thales.math.uqam.ca/~labbes/blogue/2011/11/resoudre-le-puzzle-quantumino-avec-le-logiciel-sage/>.
- . 2011b. « Sage, un logiciel libre de mathématiques », *Bulletin de l'AMQ*, vol. 51, no. 2, p. 59–67.
- Lacasse, A. 2008. « Contributions à l'analyse de figures discrètes en dimension quelconque ». Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal. D1711.
- Lothaire, M. 2002. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, 1 édition.
- Lothaire, M. 2005. *Applied Combinatorics on Words*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Mantaci, S., A. Restivo, et M. Sciortino. 2003. « Burrows–Wheeler transform and Sturmian words », *Inf. Process. Lett.*, vol. 86, no. 5, p. 241–246.
- Mignosi, F. et P. Séébold. 1993. « Morphismes sturmiens et règles de Rauzy », *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 5, no. 2, p. 221–233.
- Monnerot Dumaine, A. 2009. The Fibonacci Word fractal. 24 p.
- Morse, M. et G. A. Hedlund. 1938. « Symbolic dynamics », *American Journal of Ma-*

- thematics*, vol. 60, p. 815–866.
- Morse, M. et G. A. Hedlund. 1940. « Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories », *American Journal of Mathematics*, vol. 62, no. 1, p. 1–42.
- Nogueira, A. 1995. « The three-dimensional poincaré continued fraction algorithm », *Israel Journal of Mathematics*, vol. 90, no. 1-3, p. 373–401.
- Pelantová, E. et Š. Starosta. 2011. « Palindromic richness and Coxeter groups », *arxiv :1108.3042*.
- Provençal, X. 2008. « Combinatoire des mots, géométrie discrète et pavages ». Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal. D1715.
- Rauzy, G. 1982. « Nombres algébriques et substitutions », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 110, p. 147–178.
- Rauzy, G. 1982-1983. « Suites à termes dans un alphabet fini », *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, p. 25.01–25.16.
- Restivo, A. et G. Rosone. 2009. « Burrows–Wheeler transform and palindromic richness », *Theoretical Computer Science*, vol. 410, no. 30-32, p. 3018–3026.
- Reveillès, J.-P. 1991. « Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique. ». Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur - Strasbourg.
- Rhoads, G. C. 2005. « Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 174, no. 2, p. 329–353.
- Richomme, G., K. Saari, et L. Q. Zamboni. 2010. « Balance and abelian complexity of the Tribonacci word », *Advances in Applied Mathematics*, vol. 45, no. 2, p. 212–231.
- Sage-Combinat community. 2012. Sage-Combinat : enhancing sage as a toolbox for computer exploration in algebraic combinatorics. <http://combinat.sagemath.org>.
- Schattschneider, D. 1980. « Will it tile? try the Conway criterion! », *Mathematics Magazine*, vol. 53, no. 4, p. 224–233.
- Schweiger, F. 2000. *Multidimensional Continued Fraction*. New York : Oxford Univ. Press.
- Starosta, Š. 2011a. « Generalized Thue-Morse words and palindromic richness », *arXiv :1104.2476*.
- Starosta, Š. 2011b. « On theta-palindromic richness », *Theoretical Computer Science*, vol. 412, no. 12-14, p. 1111–1121.
- Stein, W. et al. 2012a. *Sage Mathematics Software (Version 5.0)*. The Sage Development Team. <http://www.sagemath.org>.

- . 2012b. Sage reference manual : Words. <http://www.sagemath.org/doc/reference/combinat/words.html>.
- Séébold, P. 1991. « Fibonacci morphisms and sturmian words », *Theoretical Computer Science*, vol. 88, p. 365–384.
- Tan, B. 2007. « Mirror substitutions and palindromic sequences », *Theoretical Computer Science*, vol. 389, no. 1-2, p. 118–124.
- Thue, A. 1912. « über die gegenseitige lage gleicher teile gewisser zeichenreihen », *Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl.*, vol. 1.
- Tijdeman, R. 1980. « The chairman assignment problem », *Discrete Math.*, vol. 32, no. 3, p. 323–330.
- Toutant, J.-L. 2006. « Characterization of the closest discrete approximation of a line in the 3-Dimensional space ». In *Advances in Visual Computing, 2nd Int. Symp. ISVC 2006, Lake Tahoe NV, USA, November 6-8, 2006*. T. 4291, série LNCS, p. 618–627. Springer.
- Vuillon, L. 2001. « A chararcterization of sturmian words by return words », *Eur. J. Comb.*, vol. 22, no. 2, p. 263–275.
- Wijshoff, H. A. G. et J. Van Leeuwen. 1984. « Arbitrary versus periodic storage schemes and tessellations of the plane using one type of polyomino », *Inform. and Control*, vol. 62, p. 1–25.

INDEX

- φ -bloc, 17
- k -équilibré, 14
- n -ème indice de récurrence, 13
- algorithme
 - invariant par permutation, 189
- algorithmes de fractions continues multidimensionnelles, 178
- alphabet, 12
- antimorphisme, 18
 - involutif, 18
- apériodique, 13
- bispécial, 20
 - faible, 21
 - fort, 21
 - neutre, 21
 - ordinaire, 21
- bloc, 17
- bornes inférieures, 167
- bulle, 169
- carré, 4
- chemin, 24, 26
 - 18-connexe, 25
 - 26-connexe, 25
 - 4-connexe, 24
 - 6-connexe, 25
 - 8-connexe, 24
- fermé, 29
- homologue, 26
- sans croisement, 30
- simple, 29
- chemin de Christoffel, 160
- classe \mathcal{P} , 133
- classe de conjugaison, 14
- codage de rotation sur deux intervalles, 121
- complexité palindromique, 14
- complexité palindromique minimale, 149
- critère de Conway, 4
- défaut, 119
- développement en fractions continues, 11
- différence finies d'ordre 1, 21
- différence finies d'ordre 2, 21
- discrépance, 190
- double carré, 5
- droite discrète 2D, 166
- droite discrète 3D de Reveillès, 167
- droite discrète 3D du modèle standard et d'orientation standard, 169
- droite discrète 3D du modèle supercover, 169
- droites naïves 2D, 166
- droites naïves 3D, 168

- ensemble
 - k -minimal, 25
- ensemble discret, 24
- épaisseurs arithmétiques, 167
- équilibre, 14, 191
- espace discret, 24
- extension à droite, 20
- extensions à gauche, 20
- facteur, 12
- fonction de complexité, 13
- graphe de Rauzy, 23
- graphe des facteurs, 23
- hexagone, 4
- involution, 17
- lacune, 141
- langage, 13, 20
 - factoriel, 20
 - fermé par image miroir, 20
- lettre, 12
- minimal pour k -connexité, 25
- modèle standard, 169
- morphisme, 16
 - conjugué, 18
 - conjugué à droite, 18
 - croissant, 17
 - cyclique, 18
 - effaçant, 17
 - homologue, 35
 - miroir, 17
 - primitif, 17
 - uniforme, 17
- mot, 12
 - asymétrique, 14
 - circulaire, 27
 - circulairement réduit, 28
 - conjugués, 14
 - de contour, 29
 - de Fibonacci, 16
 - de Thue-Morse, 16
 - miroir, 14
 - primitif, 13
 - récurrent, 13
 - réduit, 27
 - sturmien, 13
 - symétrique, 14
- mot caractéristique, 165
- mot de Christoffel, 161
- mot de contour, 1
- mot de retour complet, 121
- mot des différences finies, 26
- mot mécanique
 - irrationnel, 165
 - rationnel, 165
- mot mécanique inférieur, 165
- mot mécanique supérieur, 165
- mot sturmien, 165
- multiplicité bilatérale, 21

- nombre d'enroulement, 28, 29
- ordonnée à l'origine, 165
- orienté positivement, 29
- période, 13
- périodique, 13
- palindrome, 14, 72
 - f -palindrome, 72
- pavage, 3
- pavage par translation, 3
- plein, 120
- point
 - k -simple, 25
 - simple, 25
- point fixe, 18
- polyomino, 1, 25
 - k -connexe, 25
 - décomposable, 36
 - indécomposable, 35
- préfixe, 12
- premiers deux à deux, 11
- puissance d'exposant rationnel, 13
- puissance entière, 13
- quotient incomplet d'indice n , 12
- quotient partiel, 12
- riche, 120
- spécial à droite, 20
- spécial à gauche, 20
- sturmien, 17
- substitution, 16
- suffixe, 12
- suite de Pell, 78
- suite des sommes partielles, 27
- totalelement irrationnel, 11
- tuile
 - carrée, 4
 - de Fibonacci, 70
 - double carrée, 5, 33, 70
 - duale de Fibonacci, 83
 - hexagonale, 4
 - indécomposable, 5
- tuile de Fibonacci duale d'ordre n , 81
- type d'extension, 20
- uniformément récurrent, 13
- unioccurrent, 13
- valence à droite, 20
- valence à gauche, 20
- vecteur abélien, 176
- vide, 12
- winding number, 28